

УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА ФИЗИКУ



ЗАВРШНИ РАД

**ОДРЕЂИВАЊЕ НАЕЛЕКТРИСАЊА
ЕЛЕКТРОНА**

Ментор:

Др Владимир Марковић

Студент:

Александар Марковић

Крагујевац, септембар 2016.

Александар Марковић, дипломирани физичар на Природно-математичком факултету, Универзитета у Крагујевцу је дана _____ 2016. године, бранио завршни рад на тему:

ОДРЕЂИВАЊЕ НАЕЛЕКТРИСАЊА ЕЛЕКТРОНА

пред комисијом у саставу:

1. Др Драгослав Никезић, редовни професор
2. Др Милан Ковачевић, ванредни професор
3. Др Ненад Стевановић, доцент
4. Др Владимир Марковић, научни сарадник (ментор)

Одбрана завршног рада је одржана на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, у сали ____ Института за физику

Кандидат је урадио завршни рад са оценом ____ (_____)

Комисија:

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____

У Крагујевцу

_____ 2016. године

Захвалница

Овај рад је рађен на Институту за физику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, под руководством Др Владимира Марковића.

Посебно сам захвалан ментору на помоћи, стрпљењу, ангажовању, као и детаљним одговорима на многобројна питања не само у току израде мастер рада већ током свих 5 година студирања.

Захваљујем се Др Драгославу Никезићу, Др Ненаду Стевановићу и Др Милану Ковачевићу на саветима и помоћи током основних и мастер студија.

Хвала и мојој породици, пријатељима и колегама што су веровали у мене и подржавали ме свих ових година.

Септембар 2016

Списак слика у овом раду:

Слика 2-1: Кретање електрона у електричном пољу	11
Слика 2-2: Кретање електрона у простору са електричним и магнетним пољем ...	12
Слика 2-3: Електрон у хомогеном електричном пољу	14
Слика 2-4: (а) Промена убрзања, (б) брзине и (в) пређеног пута електрона са временом у хомогеном електричном пољу	15
Слика 2-5: Коефицијент расејања α $n\sigma$ електрона на атомима гаса при разним брзинама електрона (Рамсауеров ефекат)	17
Слика 2-6: Експеримент интерференције електрона Дејвисона и Џермера. На левом делу слике се налази апаратура овог експеримента, електрони убрзани напонам се одбијају на одређеним површинама никла и мери се расејани интензитет у функцији угла расејања. Десно, угаона расподела рефлектованих електрона убрзаних разним напонима. Максимум расејања на око 50 степени који потиче од интерференције.....	18
Слика 2-7: Горње, дифракционе линије филтриране црвене светлости на граници полубесконачне плоче. Средина, дифракција електрона на ивици Al_2O_3 фолије. Доле, дифракција електрона са 2m златом покривене жице.....	19
Слика 2-8: Електронска интерференција са двоструком електростатичком призмом. Успостављен је напон између влакна и супротне електроде. Електрони скрећу у резултантном нехомогеном пољу	20
Слика 2-9: Расподела измереног интензитета на филму на Слици 2.8.....	20
Слика 3-1: e/m апаратура.....	22
Слика 3-2: Електронски топ	22
Слика 3-3: Стаклени балон испуњен хелијумом	23
Слика 3-4: Индукција магнетног поља кружног проводника у тачки на оси кружног проводника.....	25
Слика 3-5: Предњи панел апаратуре e/m	28
Слика 3-6: График зависности квадрата пречника путање електрона d , од анодног напона U	34
Слика 3-7: а)Функција зависности квадрата дијаметара путање електрона на основу релације 3.16, теорија; б)График зависности квадрата дијаметара путање електрона на основу измерених вредности напона и струје - експеримент.....	36

Слика 3-8: Шема конфигурације Хелмхолцових калемова.....	39
Слика 3-9: Индукција магнетног поља кружног проводника у произвољној тачки простора.....	42
Слика 3-10: Вредности пројекције индукције магнетног поља у тачкама дуж z -осе, од једне струјне контуре.....	46
Слика 3-11: Вредности пројекције индукције магнетног поља у тачкама дуж z -осе од једног и другог калема, као и укупно магнетно поље.....	47
Слика 3-12: Пројекција индукције резултантног магнетног поља у зависности од растојања од z осе, тј. радијуса по којем се крећу електрони, у случају када кроз $N = 160$ намотаја калемова протиче струја $I = 1\text{A}$	48
Слика 3-13: Векторски дијаграм индукције магнетног поља калемова у xOz равни за студију магнетизације од 1A	50
Слика 3-14: Дијаграм интензитета индукције магнетног поља калемова у xOz равни за студију магнетизације од 1A	51
Слика 4-1: Изглед Миликеновог експеримента помоћу којег је посматрао капљице уља.....	52
Слика 4-2: Шематски приказ Миликеновог експеримента.....	53
Слика 4-3: Постоље са микроскопом, кондензатором и кућиштем сијалице код Миликеновог експеримента.....	54
Слика 4-4: Контролна јединица напона и кондензатор.....	55
Слика 4-5: Кретање капљице код Миликеновог експеримента: а) капљица слободно пада б) капљица се креће вертикално навише под дејством електричног поља.....	56
Слика 4-6: Хистограм експерименталних података из табеле 4-3.....	70
Слика 4-7: Хистограм са слике 4-6, где су зумирани пикови.....	70
Слика 4-8: Фитовани хистограми са слике 4-7 Гаусовим функцијама.....	71
Слика 4-9: Снимак мреже.....	74
Слика 4-10: Снимак кретања наелектрисаних капљица уља.....	74
Слика 7-1: График зависности брзине капљице у Миликеновом експерименту од времена при слободном паду.....	80
Слика 7-2: График зависности брзине капљице у Миликеновом експерименту од времена при кретању капљице у електричном пољу на супрот силе Земљине теже.....	80

Списак табела у овом раду:

Табела 2-1: Физичке величине динамике честица и њихове јединице.....	9
Табела 2-2: Таласна дужина електрона у ангстремима која одговара разним енергијама према де Брољу.....	18
Табела 3-1: Облик табеле у којој треба уписати резултате свих мерења у експерименту.....	29
Табела 3-2: Експерименталне вредности за одређивање односа e/m . Грешке су заокруживане на првој сигурној цифри. Болдирано су претстављене заокружене вредности.	32
Табела 3-3: Експериментални подаци (опсег напона 100V-150V)	37
Табела 3-4: Експериментални подаци (опсег напона 160V-210V)	38
Табела 4-1: Облик табеле у којој треба уписати резултате свих мерења у експерименту.....	60
Табела 4-2: Експерименталне вредности за одређивање наелектрисања капљица.	63
Табела 4-2 Наставак 1.....	64
Табела 4-2 Наставак 2.....	65
Табела 4-2 Наставак 3.....	66
Табела 4-2 Наставак 4.....	67
Табела 4-2 Наставак 5.....	68
Табела 4-3: Радијус капљица и њихова наелектрисања са припадајућим грешкама	69

Садржај

1	Увод	1
2	Особине електрона	5
2.1	Производња слободних електрона	5
2.2	Величина електрона	6
2.3	Кретање електрона у стационарним електричним и магнетним пољима	7
2.3.1	Утицај електричних и магнетних поља на кретање електрона.....	7
2.3.2	Једначина кретања електрона у стационарним електричним и магнетним пољима	9
2.3.3	Енергија електрона у стационарним Е и В пољима.....	11
2.3.4	Једначина кретања електрона у стационарном хомогеном електричном пољу	14
2.3.5	Једначина кретања електрона у стационарном магнетном пољу.....	15
2.4	Таласни карактер електрона.....	16
3	Одређивање специфичног наелектрисања електрона $\frac{e}{m}$ (Томсонов експеримент)	21
3.1	Апаратура.....	21
3.2	Одређивање $\frac{e}{m}$	24
3.3	Ток експеримента.....	27
3.4	Одређивање вредности масеног наелектрисања електрона	31
3.5	Варирање анодног напона и струје магнетизације	35
3.6	Магнетно поље Хелмхолцових калемова	39

3.6.1	Магнетно поље Хелмхолцових калемова у произвољној тачки простора	41
4	Одређивање наелектрисања електрона Миликеновим експериментом	52
4.1	Апаратура.....	53
4.2	Одређивање наелектрисања електрона	55
4.3	Ток експеримента	59
4.4	Резултати мерења вредности наелектрисања	61
4.5	Усавршавање Миликенове апаратуре	73
5	Закључак	75
6	Додатак А	76
7	Додатак Б	79
8	Додатак В.....	81
	Референце	82

1 Увод

Електрон је субатомска честица негативног елементарног наелектрисања, која припада првој генерацији фамилије лептона, [1], и притом учествује у гравитационим, електромагнетним и slabим интеракцијама, [2]. Електрон не поседује познате компоненте или субструктуру и сматра се елементарном честицом, [3]. Електрон има масу која је приближно $1/1836$ масе протона, [4]. Квантно-механичка својства електрона укључују унутрашњи ангуларни момент електрона или спин који има вредност $1/2$ у јединицама \hbar , што нам говори да се ради о фермиону. Како је електрон фермион, два електрона не могу да заузимају исто квантно стање, у складу са Паулијевим принципом искључења, [1]. Античестица електрона је позитрон; позитрон је идентичан електрону, изузев што има наелектрисање другог знака. Када се електрон судари са позитроном, обе честице могу у потпуности да се анихилирају, произведвши гама зрачење фотона.

Електрони, као и сва материја поседују квантно-механичка својства и честица и таласа, тако да могу да се сударају са другим честицама и могу да буду дифраковани попут светлости. Ова дуалност се најбоље демонстрира у експериментима са електронима, због њихове мале масе.

Електрони играју кључну улогу у многим физичким феноменима, као што су електрицитет, магнетизам, и топлотна проводност. Електрон који се налази у стању кретања релативно у односу на посматрача генерише магнетно поље, и интерагује са спољашњим магнетним пољима. Када електрон убрзава, он може да апсорбује или зрачи енергију у виду фотона. Електрони, заједно са језгром атома, начињеним од протона и неутрона, чине атоме. Међутим, електрони доприносе укупној маси атома са мање од 0,06%. Привлачна Кулонова сила између електрона и протона узрокује да се електрони везују у атоме. Размена или дељење електрона између два или више атома је главни узрок настанка хемијских веза, [5].

По теорији, већина електронна у универзуму је настало током Великог праска, али електрони могу да настану и кроз бета распад радиоактивних изотопа и у високо енергетским сударима, на пример када космички зраци уђу у атмосферу. Електрони могу бити уништени у поступку анихилације са позитронима и могу бити апсорбовани током звездане нуклеосинтезе. Лабораторијски инструменти омогућавају задржавање и посматрање појединачних електрона, као и електронске плазме, док посебни телескопи могу да детектују електронску плазму у спољашњем свемиру. Електрони имају бројне примене, укључујући заваривање, катодне цеви, електронске микроскопе, радиациону терапију, ласере, и акцелераторе честица.

Још у доба старе Грчке примећено је да ћилибар прливлочи мале објекте када се протрља крзном. Поред светлости овај феномен представља први сусрет човека са електрицитетом. Године 1600 у својој студији „*De Magnete, Magneticisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure*“ („О магнетима и намагнетисаним телима и о великом магнету Земље“) објављеној 1600 енглески научник Вилијам Гилберт (*William Gilbert*) је сковао латински назив *electricus*, који се односио на својство привлачења малих предмета пошто се протрљају неком тканином. Реч електрон потиче од грчке речи *ηλεκτρον*, што значи ћилибар.

Почетком 1700-тих Францис Хуксбе (*Francis Hauksbee*) и француски хемичар Шарл Франсоа (*Charles François de Fay*) независно један од другог су открили две врсте електрицитета који се ствара трењем, тј. трљањем тканинама различите предмете. Једна врста електрицитета се формирала трљајући стакло, док се друга формирала трљајући предмете направљене од полимерних смола (ебонита). На основу овога Франсоа је претпоставио да се електрицитет састоји од два електрична флуида која се могу раздвојити трењем и неутралисати при спајању, [6]. Деценију касније Бенџамин Франклин (*Benjamin Franklin*) је предложио објашњење по којем се електрични флуид не састоји из две компоненте, већ је у питању један флуид при различитим притисцима. Он је сковао модерни назив позитивног и негативног наелектрисања, [7].

Између 1838. и 1851., Британски научник и филозоф Ричард Ламинг (*Richard Laming*) је развио идеју да се атом састоји из језгра материје окруженог субатомским честицама јединичног наелектрисања. По проучавању феномена електролизе 1874. ирски

физичар Џорџ Џонстон Стони (*George Johnstone Stoney*) предложио је да постоји јединствена количина наелектрисања – моновалентни јон. Он је успео да одреди количину овог наелектрисања помоћу Фарадејевог закона електролизе. Међутим Стони је веровао да су ова наелектрисања перманентно везана за атом и не могу да се померају. Електрон је као честицу идентификовао Томпсон (*J. J. Thomson*) и његов тим британских физичара 1897, [8 и 9].

До 1914, експерименти физичара Ернеста Радерфорда (*Ernest Rutherford*), Хенрија Мозлија (*Henry Moseley*), Џејмса Франка (*James Franck*) и Густава Херца (*Gustav Hertz*) су у великој мери успоставили структуру атома као чврстог језгра позитивног наелектрисања, које окружују електрони мање масе, [10]. Године 1913. дански физичар Нилс Бор (*Niels Bohr*) је изнео постулат да се електрони налазе у квантизованим енергијским стањима, а да је енергија одређена моментом импулса орбите електрона око језгра. Електрони могу да прелазе из једног у друго стање, или орбиту, тако што емитују или апсорбују фотоне одговарајућих фреквенција. Помоћу ових квантизованих орбита, Бор је тачно објаснио спектралне линије водониковог атома, [11]. Међутим, Боров модел није узео у обзир релативне интензитете спектралних линија и није успешно описао спектре комплекснијих атома, [11].

Хемијске везе између атома је објаснио Гилберт Њутн Луис (*Gilbert Newton Lewis*), који је 1916. изнео идеју да ковалентну везу између два атома одржава пар електрона коју та два атома деле, [12]. Касније, 1923. Валтер Хајтлер (*Walter Heitler*) и Фриц Лондон (*Fritz London*) су дали пуно објашњење формирања хемијских веза помоћу парова електрона у контексту квантне механике, [13]. Године 1919., амерички хемичар Ирвинг Лангмјур (*Irving Langmuir*) је разрадио Луисов статички модел атома и изнео идеју да су сви електрони дистрибуирани у сукцесивним „концентричним (готово) сферичним љускама, једнаких дебљина“, [14]. Ове љуске су по моделу биле подељене у више ћелија од којих је свака садржавала по један пар електрона. Овим моделом је Лангмјур успео да објасни хемијска својства свих елемената у периодном систему елемената, за које се знало да се у великој мери понављају по периодичном закону, [15].

Године 1924., аустријски физичар Волфганг Паули (*Wolfgang Pauli*) је уочио да би љусколика структура атома могла да буде објашњена скупом од четири параметра која

дефинишу свако квантно енергетско стање, све док се у сваком стању налази највише један електрон. Ово ограничење да само један електрон може да се налази у једном квантно енергетском стању је постао познат као „Паулијев принцип искључења“, [16]. Физички механизам за објашњавање четвртог параметра, који је имао две могуће вредности, су дали холандски физичари Самуел Гоудсмит (*Samuel Goudsmit*) и Џорџ Уленбек (*George Uhlenbeck*). Године 1925. су Гоудсмит и Уленбек изнели идеју да електрон, осим што има момент импулса орбите, поседује и унутрашњи момент импулса и магнетни диполни момент, [17 и 18]. Овај унутрашњи момент импулса је постао познат као спин, и објашњава раније мистериозно цепање спектралних линија уочено на спектрографу високе резолуције; овај феномен је познат као цепање fine структуре, [19].

2 Особине електрона

2.1 Производња слободних електрона

У неким материјалима, електрони су тако чврсто везани у атомима, да се никада не одвајају из везаног стања у атому. Такви материјали су нам познати као изолатори, тј. материјали који не проводе електричну струју. За разлику од таквих, у другим материјалима неки електрони су релативно слабо везани у атому, тј. електрони из делимично попуњених спољних љуски релативно лако могу "напустити" своја места у атому и "ускочити" у празно место (шупљину) на суседном атому. На тај начин, слабо везани електрони могу се кретати по материјалу, „прескачући“ са атома на атом. Такве материјале познајемо као проводнике, а споменути слабо везани електрони зову се слободни електрони. Атоми којима недостају електрони у електронским љускама су позитивно наелектрисани, јер им је број протона у језгру већи од броја електрона. Способност провођења струје код материјала, односно пропуштање слабо везаних електрона назива се проводност. Поједностављено, можемо рећи да материјали који имају више слабо везаних електрона имају бољу проводност, па пружају мањи отпор проласку струје. Добра проводност је карактеристика метала, међутим и метали се међу собом знатно разликују по проводности електричне струје.

У раним данима атомске физике, слободни електрони су се добијали као катодни зраци из гасног пражњења. Сада, међутим, они се најчешће добијају користећи термојонску емисију са жица, [20]. Овај процес има предности јер се онда електрони могу лако фокусирати и убрзавати. Слободни електрони се такође могу добити коришћењем фотоэффекта или при емисији радиоактивних језгара.

2.2 Величина електрона

Електрон је саставни део атома. Као такав мора бити мањи од самог атома, те га је немогуће видети. Могуће је дефинисати параметар, под именом класични радијус електрона, на основу следећих претпоставки:

- електрон је сфера са радијусом r_{el} и површинским наелектрисањем $-e$
- енергија масе мировања $E = m_0c^2$ је једнака потенцијалној електростатичкој енергији површинског наелектрисања.

Сматрајући електрон сфером која је наелектрисана количином наелектрисања q и полазећи од класичне електростатике можемо израчунати енергију наелектрисане сфере.

Полазећи од Гаусовог закона $\oiint_S \vec{D} d\vec{s} = e$, добијамо да електрично поље у простору око наелектрисане сфере износи:

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq r_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2}, & r > r_0 \end{cases}, \quad (2.1)$$

где је E јачина електричног поља, а r_0 полупречник наелектрисане сфере. Енергију електричног поља у целокупном простору око наелектрисане сфере можемо одредити као:

$$E_{pot} = \int_V \omega dV = \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr, \quad (2.2)$$

где је ω густина електростатичке енергије.

Решавањем интеграла једначине (2.2) добија се вредност потенцијалне енергије сфере наелектрисане количином наелектрисања e :

$$E_{pot} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0}. \quad (2.3)$$

Услов да је $E_{pot} = m_0c^2$ (m_0 је маса мировања електрона, c је брзина светлости и $q = e$) одређује радијус $r_0 = r_{el}$

$$r_{el} = \frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}. \quad (2.4)$$

Друге, могуће претпоставке по питању расподеле наелектрисања (континуална расподела унутар запремине сфере уместо површинског наелектрисања) доводе до нешто различитих нумеричких вредности. Класични радијус електрона је коначно дефинисан као:

$$r_{el} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ m.} \quad (2.5)$$

Из овог извођења се види да је овај параметар чисто концептуалне природе. Мада, у принципу се ова величина може измерити. На пример, пресек расејања се може одредити из расејања x-зрачења, исто као и пресек расејања атома гаса. Резултат таквих експеримената је $\sigma = \pi r_{el}^2$ и нађено је да је параметар r_{el} истог реда величине као и класични радијус електрона дефинисан једначином (2.5).

Експерименти расејања електрона на електронима показују да нема одступања од Кулоновог (*Coulomb*) закона, чак и при врло малим сударним растојањима. Као закључак изводи се да је електрон честица без структуре, (*point like particle*) или честица слична тачки, [22].

2.3 Кретање електрона у стационарним електричним и магнетним пољима

2.3.1 Утицај електричних и магнетних поља на кретање електрона

Већ први огледи са катодним зрацима показали су да они имају низ особина, и то:

- убрзавају се или успоравају утицајем електричног поља;
- мењају правац кретања у електричном пољу;
- мењају правац кретања у магнетном пољу;
- имају наелектрисање;
- крећу се, имају импулс и могу да га пренесу на макроскопска тела;

- крећу се, имају кинетичку енергију и могу да изазову разне ефекте на макроскопским телима.

Детаљна испитивања особина катодних зрака, тј. електрона, квантитативним мерењима изведена су у веома великом броју огледа. Зависно од начина добијања и брзине електрона, ти огледи се могу сврстати у две класе:

- 1) огледи са катодним зрацима, или електронима ниских енергија (нерелативистичким електронима) – електрони малих брзина у поређењу са брзином простирања светлости c , обично убрзаних из непокрета електричним напонима реда 100 eV, и
- 2) огледи са електронима великих брзина (релативистичким електронима $v \cong c$).

У већини огледа са катодним зрацима разматрају се последице деловања спољашњих електричних и магнетних поља на њих. У време постављања тих експеримената и њихове анализе, нису биле познате све особине тих деловања.

Експерименти са релативистичким електронима били су најпре усресређени на интеракцију X зрачења са супстанцијом и мерење угаоне расподеле интензитета избачених електрона, те поређење тих резултата са Томсоновом формулом за светлост, или тзв. косинусним законом, [21]. Проблем те „ β асиметрије“ која није могла бити описана Томсоновом формулом, био је инспиритиван за многе познате физичаре, као што су Браг (*William Henry Bragg*), Баркла (*Charles Glover Barkla*), Томсон (*J.J. Thomson*), све у настојању да разумеју природу светлости и електрона. Испитивање кретања релативистичких електрона, из β радиоактивног распада, у паралелним електричним и магнетним пољима у Кауфмановим огледима, довело је до открића зависности масе електрона од његове брзине, и то четири године пре појаве теорије релативитета.

У даљем тексту ће се третирати интеракција слободних електрона са електричним и магнетним пољем. Наелектрисање електрона биће означено са q , ознаком усвојеном за непознати износ наелектрисања. Релације изведене на тај начин важе за електроне, али исто тако и за друге наелектрисане честице уз одговарајућу смену вредности за њихову масу и наелектрисање, [23].

2.3.2 Једначина кретања електрона у стационарним електричним и магнетним пољима

Детаљна проучавања показала су да се сила електричног и магнетног поља на катодне зраке, тј. електроне, као наелектрисане честице масе m_e и количине наелектрисања q , може се представити релацијом

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.6)$$

Први сабирак десне стране једначине, $\vec{F}_E = q\vec{E}$, назива се електростатичка или Кулонова (*Coulomb*) сила, а настаје међуделовањем електричног поља \vec{E} и наелектрисања q . Други сабирак, $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$ назива се магнетна или Лоренцова (*Lorentz*) сила, а настаје међуделовањем магнетног поља магнетне индукције \vec{B} и наелектрисања електрона q у покрету брзином \vec{v} , [23].

За све величине у једначини (2.6), и даље у тексту, биће коришћене јединице Међународног система јединица (SI) дате у табели 2-1.

Табела 2-1: Физичке величине динамике честица и њихове јединице

Физичка величина		Јединица		Димензије у SI
Назив	Ознака	Назив	Ознака	
Сила	F	Њутн	[N]	[kg m s ⁻²]
Брзина кретања	v	Метар у секунди		[m s ⁻¹]
Убрзање	a	Метар у секунди на квадрат		[m s ⁻²]
Време	t	Секунда		[s]
Количина наелектрисања	q	Кулон	[C]	[A s]
Јачина ел. поља	E	Волт по метру	[V/m]	[kg m s ⁻³ A ⁻¹]
Јачина маг. индукције	B	Тесла	[T]	[kg s ⁻² A ⁻¹]

Под утицајем силе међуделовања електричног и магнетног поља, као и наелектрисања електрона долази до промене његовог импулса (други Њутнов (*Newton*) закон)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (2.7)$$

Сменом (2.7) у (2.6) добија се једначина кретања електрона у простору са електричним и магнетним пољем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.8)$$

Уколико је брзина кретања електрона v веома мала у поређењу са брзином простирања светлости c ($|v| \ll c$), маса електрона m може се сматрати сталном и једнаком маси мировања електрона m_e . Стога је

$$\vec{p} = m_e \vec{v} \quad (2.9)$$

Што сменом у (2.8) даје

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.10)$$

При великим брзинама кретања електрона, поредивим са брзином простирања светлости ($v \cong c$), маса електрона се мења, те се једначина (2.10) мора преиначити увођењем зависности масе од брзине кретања

$$m = m_e \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_e \gamma, \quad (2.11)$$

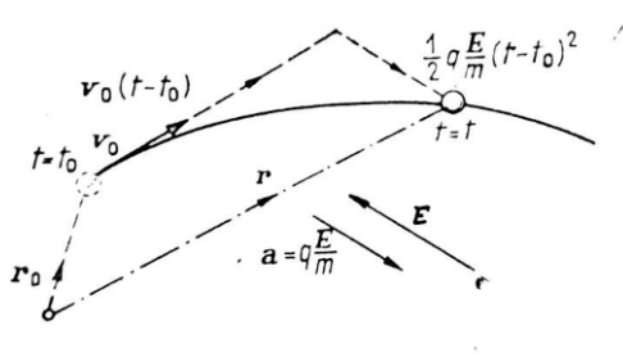
где су $\beta = \frac{v}{c}$, и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, што даје:

$$\frac{d}{dt}(m_e \gamma \cdot \vec{v}) = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.12)$$

За решавање конкретних задатака о кретању електрона брзине много мање од брзине простирања светлости ($v \ll c$) погодно је једначину (2.10) писати у облику

$$a = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \eta [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \quad (2.13)$$

Ако је почетни положај електрона у електричном пољу одређен радијус вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}(0)$ у односу на центар лабораторијског система (слика 2-1), а почетна брзина \vec{v}_1 позната, сви подаци о кретању електрона (убрзање, брзина кретања, путања, време прелета одређеног растојања и сл.) могу бити одређени.



Слика 2-1: Кретање електрона у електричном пољу

Уколико су магнетно и електрично поље стационарни (не мењају се са временом) сваки електрон који се креће из тачке простора, истом почетном брзином креће се по путањи истих особина, [23].

2.3.3 Енергија електрона у стационарним E и B пољима

Тачно одређивање путање електрона представља у општем случају тежак задатак, чак и када се електрично и магнетно поље не мењају у току времена по правцу и интензитету, и када зависе искључиво од положаја посматране тачке у простору, [23]. На основу тога могуће је извести општи закључак у вези са енергијом електрона у току кретања кроз простор са стационарним пољима.

Нека се електрон креће од тачке A до тачке B (слика 2-2), те нека су поља коначних вредности и не мењају се током времена по интензитету, правцу и смеру ($E \neq f(t), B \neq f(t)$). Из једначине (2.10) се интеграљењем по пређеном путу од тачке A до тачке B добија рад,

$$m_e \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = q \int_A^B \vec{E} d\vec{r} + q \int_A^B (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{r}. \quad (2.14)$$

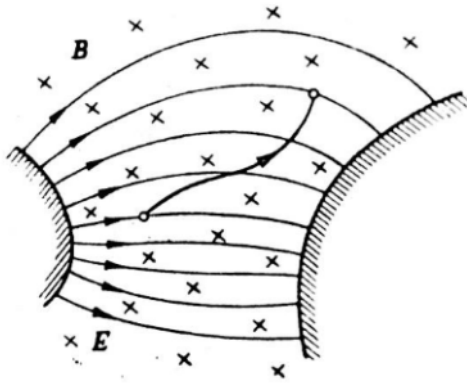
Лева страна једначине (2.14) је:

$$m_e \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m_e \int_{v_1}^{v_2} \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} = m_e \int_{v_1}^{v_2} \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m_e v_2^2 - \frac{1}{2} m_e v_1^2. \quad (2.15)$$

Први сабирак десне стране једначине (2.14) је:

$$q \int_A^B \vec{E} d\vec{r} = q \int_A^B \text{grad}(V) dr = q(V_1 - V_2). \quad (2.16)$$

Други сабирак једнак је нули, јер су вектор брзине кретања електрона \vec{v} и вектор промене положаја електрона $d\vec{r}$ међусобно паралелни.



Слика 2-2: Кретање електрона у простору са електричним и магнетним пољем

Резултат интеграљења једначине (2.14) је

$$\frac{1}{2} m_e v_2^2 - \frac{1}{2} m_e v_1^2 = q(V_1 - V_2), \text{ тј.} \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{2} m_e v_1^2 + qV_1 = \frac{1}{2} m_e v_2^2 + qV_2$$

Ово је у ствари закон о очувању енергије, јер обе стране једнакости садрже збир кинетичке енергије и потенцијалне енергије електрона у електричном пољу. У једначини за енергију се не јавља утицај магнетног поља на електрон. На кретање електрона у простору са обе стране поља, магнетно поље утиче на облик путање, али не утиче на интензитет брзине кретања електрона, па отуда нити на његову кинетичку енергију. Разлог је што сила магнетног деловања има увек правац ортогоналан на правац брзине кретања електрона.

Брзина кретања електрона у тачки B простора може бити одређена из једначине (2.17):

$$v_2 = \sqrt{(2\eta(V_1 - V_2) + v_1^2)}, \quad (2.18)$$

тј. интензитет брзине зависи од разлике потенцијала између тачака A и B , а не зависи од облика електричног поља између њих, а оно у општем случају може бити сложена функција координата. За електрон, уз услов да је био у непокрету у тачки A ($\vec{v}_1 = 0$), једначина (2.18) даје, сменом познатих вредности за наелектрисање и масу, релацију

$$v_2 = 5,953 \cdot 10^5 \sqrt{V_1 - V_2} \quad [\text{m/s}] \quad (2.19)$$

Промена енергије електрона при преласку из једне у другу тачку простора, такве да је разлика потенцијала једнака јединици, $\Delta V = 1 [\text{V}]$, износи

$$q(V_1 - V_2) = e \cdot 1 [\text{eV}] = 1,6021773349 \cdot 10^{-19} [\text{J}] \quad (2.20)$$

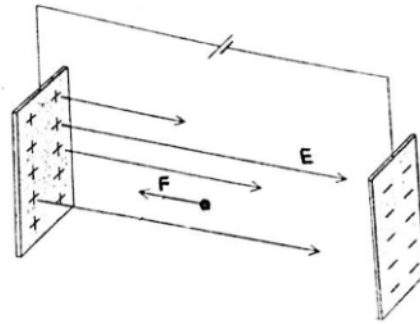
А вредност енергије назива се електронволт, [23] и обележава се са $1 [\text{eV}]$. Корисно је и навести обратну везу

$$1 [\text{J}] = 6,24150634 \cdot 10^{18} [\text{eV}]. \quad (2.21)$$

Ова вредност за јединицу $1 [\text{eV}]$ усвојена је од стране IUPAP 1987. године.

2.3.4 Једначина кретања електрона у стационарном хомогеном електричном пољу

Нека се електрон креће у простору где постоји само електрично поље ($\vec{B} = 0$). Најједноставније је хомогено електрично поље створено између две међусобно паралелне бесконачне равне површи (слика 2-3).



Слика 2-3: Електрон у хомогеном електричном пољу

Сила деловања поља на наелектрисања је

$$\vec{F}_E = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \quad (2.22)$$

У хомогеном електричном пољу су правац и интензитет убрзања електрона стални у току времена

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \eta\vec{E} \quad (2.23)$$

Брзина кретања у тренутку t од почетка посматрања (t_1) добија се интеграљењем једначине (2.23)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \eta\vec{E} dt = \vec{v}_1 + \eta\vec{E}(t_2 - t_1) \quad (2.24)$$

Овде је са v_1 означена брзина електрона у тренутку почетка посматрања. Положај електрона у простору одређен је радијус вектором, а он се добија интеграљењем једначине (2.24) по времену:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt, \quad (2.25)$$

где је са r_1 означен радијус вектор положаја електрона у почетку посматрања (слика 2.1). Интеграљење (2.25) даје:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + \vec{v}_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \eta \vec{E}(t_2 - t_1)^2. \quad (2.26)$$

На слици 2-4 су редом приказане зависности убрзања, брзине и пређеног пута у зависности од времена при кретању електрона у хомогеном стационарном електричном пољу.



Слика 2-4: (а) Промена убрзања, (б) брзине и (в) пређеног пута електрона са временом у хомогеном електричном пољу

2.3.5 Једначина кретања електрона у стационарном магнетном пољу

У простору са само стационарним магнетним пољем ($\vec{E} = 0$) на електрон делује само Лоренцова сила

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.27)$$

Она је ортогонална на тренутну брзину кретања електрона, па због тога доводи само до промене правца кретања електрона, а не мења интензитет брзине, а самим тим и кинетичку енергију. То се може показати множењем једначине (2.27) скаларно брзином електрона

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \quad (2.28)$$

што даје

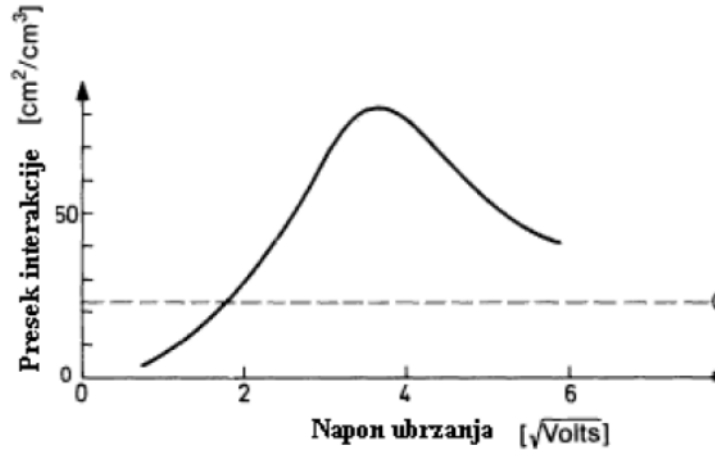
$$\frac{d}{dt}(v^2) = 0, \text{ па је } v^2 = \text{const}, \text{ односно } |\vec{v}| = \text{const} \quad (2.29)$$

2.4 Таласни карактер електрона

Кретање електрона у електричном и магнетном пољу се иницијално може разумети као честично кретање. На тај начин је и третирано у објашњавању различитих експеримената. Постоје, међутим, бројни други експерименти у којима електрони и друге честице показују феномене дифракције и интерференције, то јест оне показују таласни карактер. У овом делу дискутоваћемо експерименталну основу претпоставке о постојању материјалних таласа.

Експеримент 1: Рамсоеров (Ramsauer) ефекат (1921), [22]

Мерење пресека интеракције судара врло спорог електрона са атомом гаса даје врло малу вредност, много мању него што је нађено у кинетичкој теорији гасова; на нешто већој енергији електрона, нађене су знатно веће вредности (слика 2-5). Овај тип зависности пресека интеракције од брзине се може објаснити као резултат дифракције на честицама чија је величина упоредива са таласном дужином електрона.



Слика 2-5: Коефицијент расејања α $n\sigma$ електрона на атомима гаса при разним брзинама електрона (Рамсауеров ефекат)

Експеримент 2: Проучавање Дејвисон (Clinton Joseph Davisson) и Џермера (Lester Germer)(1919); њихово објашњење (1927),[22]

При рефлексији спорих електрона на кристалима Дејвисон и Џермер су запазили интерференциони ефекат, тј. максимуме и минимуме у интензитету рефлектованих електрона, који су једнозначно одређени брзином електрона, оријентацијом кристала и углом опажања. Њихов експериментални уређај и резултати су приказани шематски на слици 2-6. Интерференциони максимуми и минимуми се појављују на сличан начин као и код дифракције X зрачења на кристалним равнинама у Браговом (Bragg) експерименту. Појава интерференције значи да кретање електрона мора бити у вези са таласним феноменима. Заиста, де Брољ (de Broglie) је дао сугестију да, као што светлост може да има честични карактер, електрони такође морају да имају и таласни карактер.

Он је претпоставио исправност фундаменталне релације између импулса и таласне дужине

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (2.30)$$

Изразимо импулс преко масе и брзине

$$p = m_0 v \quad (2.31)$$

У случају нерелативистичких брзина

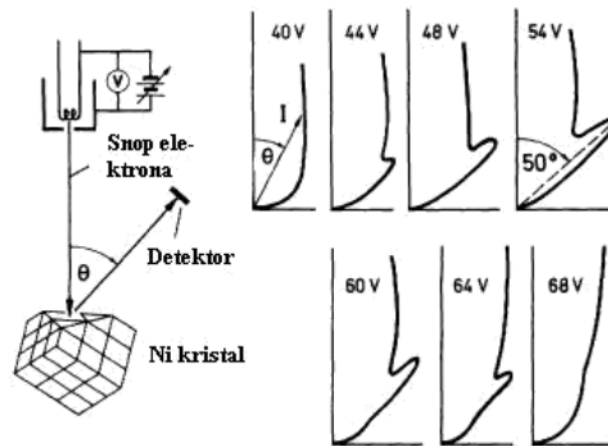
$$v = \sqrt{\frac{2E_{kin}}{m_0}} \quad (2.32)$$

Заменом (2.32) у (2.31) и затим то у (2.30) налазимо да је

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0 E_{kin}}} \quad (2.33)$$

Следи да је таласна дужина електрона који је убрзан напоном V

$$\lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \left[\overset{\circ}{\text{A}} \right] \quad (2.34)$$



Слика 2-6: Експеримент интерференције електрона Дејвисона и Цермера. На левом делу слике се налази апаратура овог експеримента, електрони убрзани напоном се одбијају на одређеним површинама никла и мери се расејани интензитет у функцији угла расејања. Десно, угаона расподела рефлектованих електрона убрзаних разним напоима. Максимум расејања на око 50 степени који потиче од интерференције

Таласна дужина се мери у ангстремима и кинетичка енергија се конвертује у $[eV]$, јер електрон добија кинетичку енергију прелазећи напон V . Напон убрзања од $54V$, на пример даје $\lambda = 1.67 \overset{\circ}{\text{A}}$. Де Брољева хипотеза се примењује на све честице, а не само на електроне. Вредности дате у табели 2-2 су за електрон

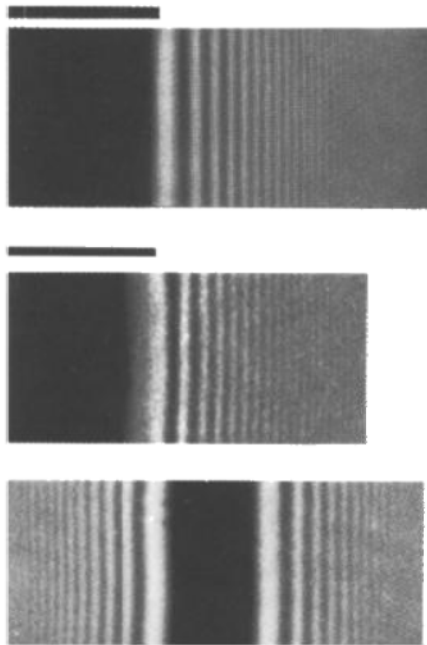
Табела 2-2: Таласна дужина електрона у ангстремима која одговара разним енергијама према де Брољу

E_{kin} (eV)	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
(Å)	3.9	1.2	0.39	0.12	$3.7 \cdot 10^{-3}$	8.710^{-3}	1.210^{-3}	1.210^{-4}

Многи други експерименти су сугерисали исто и могу се разумети на овај начин.

Експеримент 3: Фреснелова (Fresnel) дифракција на оштрој граници (1956), [22]

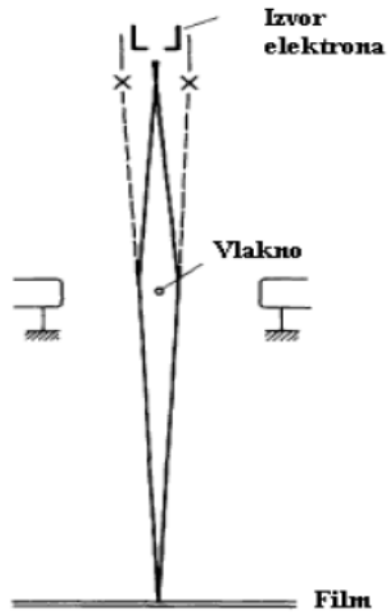
Један од основних експеримената у оптици је дифракција на полубесконечној равни. Као и светлост, и електрони могу да дифрактују на оштрој граници (ивици). У овом експерименту они дифрактују на ивици танке фолије Al_2O_3 (слика 2-7).



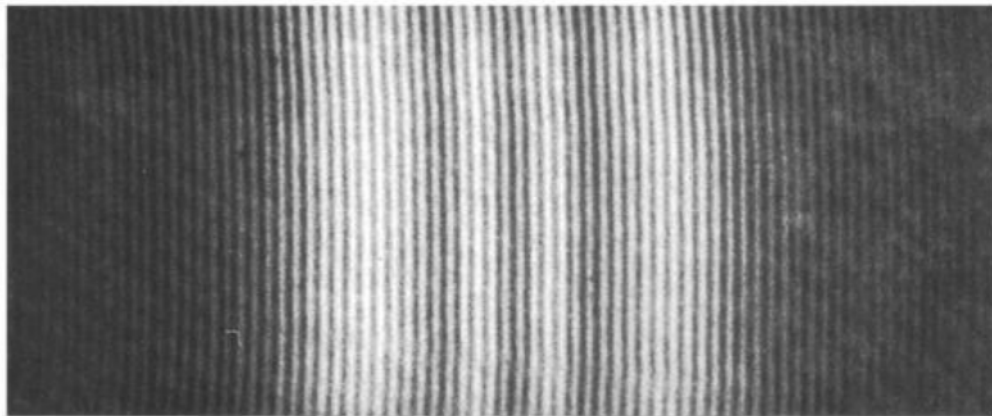
Слика 2-7: Горe, дифракционе линије филтриране црвене светлости на граници полубесконачне плоче. Средина, дифракција електрона на ивици Al_2O_3 фолије. Доле, дифракција електрона са 2m златом покривене жице

Експеримент 4: Дифракција на Фреснеловој двострукој призми (1956), [22]

Експеримент класичне оптике на Фреснеловој двострукој призми се може извести и са електронима. У овом експерименту, наелектрисано кварцно влакно делује као двострука призма за електроне. Електрони из два виртуелна електронска извора интерферирају (слика 2-8). Мерење резултујућих интерференционих линија потврђује де Брољеву релацију до 0.5 % (слика 2-9).



Слика 2-8: Електронска интерференција са двоструком електростатичком призмом. Успостављен је напон између влакна и супротне електроде. Електрони скрећу у резултантном нехомогеном пољу



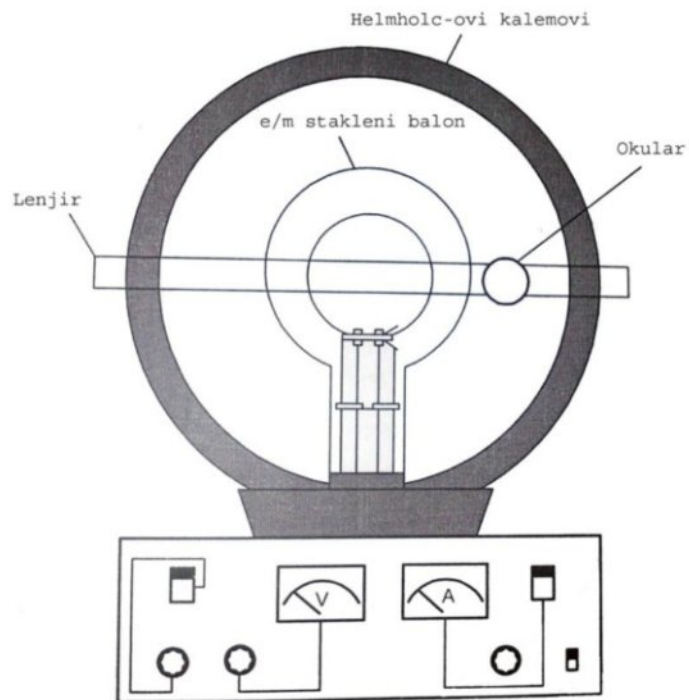
Слика 2-9: Расподела измереног интензитета на филму на Слици 2.8

3 Одређивање специфичног наелектривања електрона $\frac{e}{m}$ (Томсонов експеримент)

Џозеф Џон Томсон (*Joseph John Thomson*) је био британски физичар рођен у Манчестеру 1856. године. Школовао се на Овенсовом колеџу у Манчестеру и на Тринити колеџу у Кембриџу. Од 1905. до 1918. био је предавач у Краљевском институту. Томсон је открио електрон и тиме постао први истраживач који се бавио физиком елементарних честица. Нобелову награду за физику добио је 1906. године за теоријска и експериментална истраживања провођења електрицитета кроз гасове и због тога што је показао да је електрон субатомска честица. Главне истраживачке заслуге су му откриће електрона, изотопа и масеног спектрометра. Његов син Џорџ Паџет Томсон (*George Paget Thomson*) доста година после оца добио је такође Нобелову награду након што је показао да се електрон понаша као талас. Поред Нобелове награде Џозеф је био власник и Краљеве, Хјузове и Коплејеве медаље. Умро је у Кембриџу 1940. године.

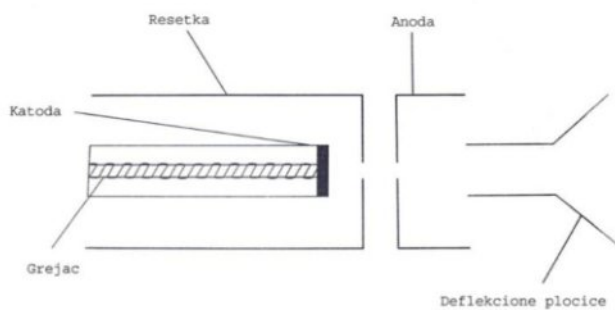
3.1 Апаратура

Апаратура за одређивање масеног наелектривања (e/m), базирана на Томсоновој методи, [22], се састоји од стакленог балона у којем је затопљен систем састављен од влакна за грејање катоде, катоде, решетке, аноде и пара дефлекционих плоча, (слика 3-1).



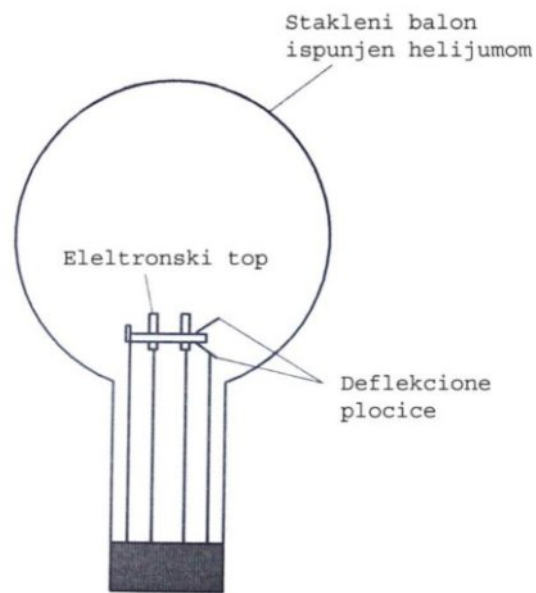
Слика 3-1: e/m апаратура

Електрони напуштају загрејану катоду услед термоелектронске емисије и даље се убрзавају високим анодним напонем. На решетки и аноди се налази узан отвор кроз који пролазе електрони, (слика 3-2). Стаклени балон је испуњен хелијумом под ниским притиском, (слика 3-3).



Слика 3-2: Електронски топ

Известан број електрона емитованих са катоде се сударају са атомима хелијума који се притом ексцитују. Приликом враћања у основно стање емитују зрачење из видљивог дела спектра. Тако електрони остављају видљив траг унутар стакленог балона. Стаклени балон је смештен између између пара Хелмхолцових (*Helmholtz*) калема који производе прилично униформно магнетно поље познате индукције,[24]. Постоље стакленог балона се може ротирати тако да се електронски сноп може поставити нормално на индукцију магнетног поља. Електронски сноп формира кружну путању радијуса r , који зависи од убрзавајућег напона U , индукције магнетног поља B и односа $\frac{e}{m}$. Ова кружна путања је видљива и може се измерити полупречник кружнице.



Слика 3-3: Стаклени балон испуњен хелијумом

Ова апаратура се може користити и за проучавање кретања електрона у случају различитих праваца индукције магнетног поља у односу на почетну брзину електрона ротирањем стакленог балона.

3.2 Одређивање $\frac{e}{m}$

За одређивање масеног наелектрисања, користићемо експерименталну апаратуру описану у досадашњем тексту. Дефлекционе плоче немају улогу при одређивању $\frac{e}{m}$. Оне се могу користити за визуелно опажање скретања електрона услед електричног поља које се јавља између ових плоча.

Када је емитовани електронски сноп нормалан на индукцију магнетног поља електрони ће скретати у равни у којој се налазе калемови. Када се путања затвори у кружницу настаје динамичка равнотежа између силе магнетног поља и центрифугалне силе:

$$F = F_{cf}, \quad (3.1)$$

тј.
$$evB = \frac{mv^2}{r} \quad (3.2)$$

где је m маса електрона и r полупречник путање електрона.

Решавањем (3.2) по v , добија се:

$$v = \frac{eBr}{m} \quad (3.3)$$

У експерименту електрони добијају енергију од електричног поља створеног потенцијалном разликом U између катоде и аноде:

$$eU = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.4)$$

Комбиновањем једначина (3.3) и (3.4) добијамо:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} \quad (3.5)$$

Како би смо одредили масено наелектрисање на основу релације (3.5) потребно је познавати анодни напон, U , радијус кружне путање електрона, r , и индукцију магнетног поља, B . Анодни напон и радијус путање електрона је могуће директно мерити. Магнетну индукцију је потребно изразити преко мерљивих величина.

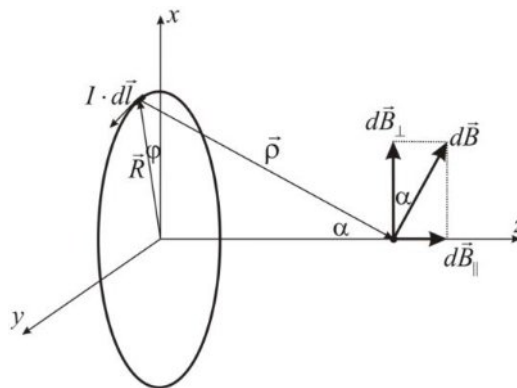
Магнетна индукција на растојању z од центра кружног струјног намотаја полупречника R на њеној оси је:

$$B_0 = \frac{\mu r^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.6)$$

Релацију (3.6) можемо извести полазећи од Био-Савар-Лапласовог (*Biot-Savart-Laplace*) закона, (слика 3-4):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{\rho}}{\rho^3}. \quad (3.7)$$

Уколико имамо струјну контуру у облику кружнице, као на слици 3-4, полупречника R и изаберемо један струјни елемент $I d\vec{l}$, индукција магнетног поља у некој тачки на оси кружнице се може разложити на компоненту у правцу осе и нормалну на осу симетрије кружнице. Из разлога симетрије треба посматрати компоненту индукције магнетног поља која је у правцу осе симетрије кружнице. Компонента магнетног поља која је нормална на z -осу, приликом интеграције по читавој контури ће се анулирати са струјним елементом помереним за угао π , због чега неће постојати компонента индукције магнетног поља која није у правцу z -осе.



Слика 3-4: Индукција магнетног поља кружног проводника у тачки на оси кружног проводника

Са слике 3-4 је:

$$dB_{\parallel} = dB \cdot \sin \alpha \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{R}{\rho}, \quad (3.8)$$

па је

$$B_0 = B_{\parallel} = \frac{IR\mu_0}{4\pi\rho^3} \int_0^{2\pi R} dl. \quad (3.9)$$

Како је

$$\rho = \sqrt{z^2 + R^2} \quad (3.10)$$

можемо записати израз за магнетску индукцију у облику:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.11)$$

где је I струја кроз један намотај. Хелмхолцови калемови су постављени симетрично и то тако да струја кроз њих тече у истом смеру, тако да се индукције магнетног поља између калемова сабирају. Како имамо N намотаја можемо писати:

$$B = 2NB_0 = N\mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.12)$$

Конфигурација Хелмхолцових калемова је таква да су два калема на растојању једнаком њиховим полупречницима. Стаклени балон налази на средини између калемова, $z = R/2$, па је:

$$B = \frac{8\sqrt{5}N\mu_0 I}{25R}. \quad (3.13)$$

Експериментална апаратура на којој се осређује специфично наелектрисање има радијус Хелмхолцових калемова $R = 0.14\text{m}$. Калемови имају по $N = 160$ намотаја, [24]. Комбинујући релацију (3.5) и (3.13) добијамо:

$$\frac{e}{m} = \frac{125R^2 U}{32N^2 \mu_0^2 I^2 r^2}. \quad (3.14)$$

Како је величина које се директно мери у експерименту пречник, тј. дијаметар путање електрона, релација (3.14) се може изразити преко пречника (дијаметра) d :

$$\frac{e}{m} = \frac{125UR^2}{8N^2\mu_0^2I^2d^2} \quad (3.15)$$

Вредност константе $\frac{125R^2}{8N^2\mu_0^2}$ износи $7.576 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2\text{A}^4}{\text{N}^2}$. На крају вредност масеног наелектрисања можемо одредити једначином:

$$\frac{e}{m} = (7.576 \cdot 10^6) \cdot \frac{U[\text{V}]}{I^2[\text{A}^2] \cdot d^2[\text{m}^2]} \frac{\text{C}}{\text{kg}}, \quad (3.16)$$

где напон замењујемо у волтима, струју у амперима и пречник путање електрона у метрима.

Литературна вредност масеног наелектрисања $\left(\frac{e}{m}\right)$, [24] износи:

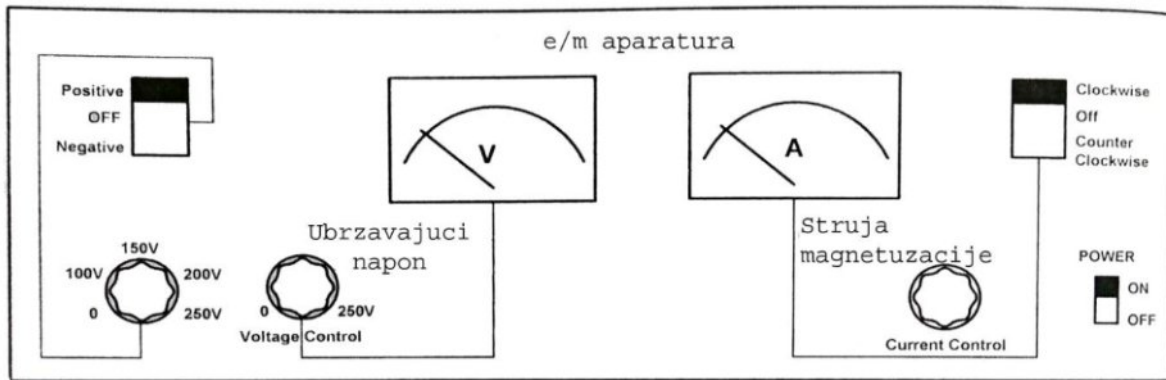
$$\frac{e}{m} = 1.758820088 \pm 39 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}, \quad (3.17)$$

и ова вредност у границама експерименталне грешке треба бити добијена.

3.3 Ток експеримента

Стаклени балон је постављен на ротирајуће постоље између пара Хелмхолцових калемова. Балон се може ротирати око вертикалне осе мењајући оријентацију снопа електрона у односу на Хелмхолцове калемове. На овај начин је омогућена демонстрација скретања електрона у магнетном пољу. Смер струје у калемовима се може мењати. Струја магнетизације I и убрзавајући напон U се могу мерити амперметром и волтметром монтираном на предњем панелу апаратуре, (слика 3.5). За одређивање e/m постоље балона се ротира тако да путања снопа електрона буде под правим углом у односу на индукцију магнетног поља. Електронски снап закреће у кружну путању. Пречник путање електронског снопа се мери скалом која је монтирана испред стакленог балона. Ова скала има клизач са монтираном шупљом цеви са нишаном, како се неби правила грешка

мерења услед угла гледања. База апаратуре садржи извор напајања, а комплетна апаратура је смештена у дрвену кутију.



Слика 3-5: Предњи панел апаратуре e/m

Задаци:

- Пре укључивања прекидача на „ON“, проверити да ли су прекидачи и потенциометри искључени и постављени на минимум.
- Укључите прекидач „POWER“ на „ON“. Светлеће индикаторска лампа.
- Сачекајте неколико минута да се катода загреје.
- Окрените потенциометар који служи за промену убрзавајућег напона како би се повећао напон. Линеарни електронски сноп који се емитује из електронског топа ће бити видљив. Подесите убрзавајући напон на 100 V .
- Јасно је да електрони сами по себи нису видљиви. Оно што се посматра је сјај атома хелијума у стакленом балону услед судара електрона са атомима хелијума. Види се електомагнетно зрачење које настаје деекситацијом хелијума који је предходно био ексцитован на више енергетско стање услед судара са електронима.
- Заротирајте e/m стаклени балон тако да сноп електрона буде паралелан равни у којој се налазе Хелмхолцови калемови.
- Мегнетно поље Земље утиче на мерења, али је ово поље много мањег интензитета и може се занемарити у првој апроксимацији.
- Полако појачавајте струју магнетизације на око 1 A . Електронски сноп ће се закривити. Појачавањем струје смањиваће се радијус путање електрона.

- Уколико снап електрона не затвара лепо круг, већ се формира завојница, стаклени балон није подешен тако да је снап електрона у равни калемова. Ротирајте стаклени балон док се не формира затворена кружница.
- Измерите положај спољњег дела снопа електрона на левој, x_1 , и десној, x_2 , страни, помоћу нишана (окулара). Дијаметар снопа израчунавате као $d = x_2 - x_1$.
- Очитајте вредност струје магнетизације на амперметру и убрзавајућег напона на волтметру.
- Смањујте убрзавајући напон за по 10 V и измерите пречник путање електрона.
- Приликом мерења водите рачуна да вредности убрзавајућег напона буду између 80 V и 250 V . Струја магнетизације не сме прећи 2 A .
- Не остављати снап укључен дуг период времена.
- Резултате мерења сортирајте у табелу облика

Табела 3-1: Облик табеле у којој треба уписати резултате свих мерења у експерименту

Струја магнетизације $I[A]$	Убрзавајући напон $U[V]$	x_1, x_2	Дијаметар снопа $d[m]$	$\Delta d[m]$	$d^2[m^2]$	$\Delta(d^2)$
1.						
2.						
3. ...						

За фиксирану вредност струје магнетизације мењан је убрзавајући напон. Уколико релацију (3.15) запишемо у облику:

$$d^2 = \frac{125R^2}{8N^2\mu_0^2} \frac{1}{I^2} \frac{m}{e} U, \quad (3.18)$$

тј. $d^2 = k \cdot U,$ (3.19)

можемо нацртати график зависности d^2 од U који ће имати линеаран тренд. За цртање графика треба користити милиметарски папир. На графику треба нацртати грешке мерења (*error bars*) за сваку измерену тачку на апциси и ординанти. Уколико су грешке мање од величине најмањег подеока милиметарског папира, као грешку узери најмањи подеок милиметарског папира. Права линија мора да пресеца правоугаонике који формирају грешке.

Са графика се може скинути коефицијент правца праве облика $y = kx + n$ графичком методом. Уколико график пролази кроз координатни почетак, узети координатни почетак $O(0,0)$ као једну сигурну тачку. У супротном изабрати две тачке са графика, између прве и друге $A(x_A, y_A)$ и предпоследње и последње $B(x_B, y_B)$, и одредити коефицијент правца праве и припадајућу грешку:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (3.20)$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_B + \Delta y_A}{y_B - y_A} + \frac{\Delta x_B + \Delta x_A}{x_B - x_A} \quad (3.21)$$

Грешке $\Delta x_A, \Delta x_B, \Delta y_A$ и Δy_B узети као већу грешку суседних експериментално (измерених) тачака. На пример вредност Δx_A треба узети као већу грешку по апцисној оси две суседне измерене тачке. Тако треба поновити за сваку од грешака. Уколико су грешке мање од величине најмањег подеока на графику, као грешку узети најмањи подеок на графику. Познавајући коефицијент правца праве, на основу релације (3.16) можемо одредити вредност масеног наелектисања и припадајућу грешку:

$$\frac{e}{m} = \frac{7.576 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{m}^2 \text{A}^4}{\text{N}^2} \right]}{I^2 [\text{A}]} \frac{1}{k \left[\frac{\text{m}^2}{\text{V}} \right]} \quad (3.22)$$

$$\frac{\Delta \left(\frac{e}{m} \right)}{\frac{e}{m}} = 2 \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta k}{k} \quad (3.23)$$

Све вредности физичких величина које се одређују преко мерених, потребно је изразити у оквиру грешке коју је потребно одредити преко грешака директно мерених величина. У овом случају директно мерене величине су растојање, напон и струја.

$$\Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \Delta x \quad 0.1 \text{cm} \quad 1 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= 5V \\ \Delta I &= 0.05A \end{aligned} \tag{3.24}$$

Нацртати скицу експерименталне апаратуре и скицирати векторе брзине електрона, Лоренцове силе којом индукција магнетног поља делује на електроне и вектор индукције магнетног поља.

Главни извор грешки у овом експерименту је брзина електрона која се одређује мерећи анодни напон. На аноди постоји рупица кроз коју електрони пролазе. По проласку кроз аноду они осећају привлачно електрично поље које тежи да их врати натраг ка аноди. Због тога брзина електрона није униформна и нешто је мања од теоријске вредности. Такође се при судару са атомима хелијума делимично успоравају. Све ово се одражава на сноп електрона који се проширује ка центру са пређеним растојањем, тако да се светли видљиви траг размазује. Да би се умањила грешка мерења потребно је мерити спољни радијус снопа јер он одговара електронима са већим брзинама.

Напомена: Заокруживање вредности физичких величина се врши исто као и заокруживање бројева. Грешке се заокружују на прву или другу сигурну цифру тако да, ако је иза прве или друге сигурне цифре 0, узима се вредност сигурне цифре. Уколико је цифра иза прве или друге сигурне цифре 1 или више, сигурна цифра се повећава за један. На пример: $0.01023 \approx 0.01$, док је $0.01223 \approx 0.02$. Вредности физичких величина треба заокружити на ону цифру на којој је грешка мерења.

3.4 Одређивање вредности масеног наелектрисања електрона

Користећи једначину (3.15) и експерименталну апаратуру описану у предходном тексту можемо одредити масено наелектрисање електрона. Како би се минимизирала грешка мерења за одређивање односа e/m користимо графичку методу. То је један од могућих начина обраде експерименталних података помоћу којег се визуелно може уочити најчешће линеарна зависност одређених физичких величина. Линеаризацијом једначине (3.15) добијамо израз (3.18), који можемо записати у облику (3.19), где је

$$k = \frac{125R^2}{8N^2\mu_0^2} \frac{1}{I^2} \frac{m}{e}, \quad (3.25)$$

коэффициент правца праве у изразу (3.19).

Потребно је напоменути да је могуће извршити линеаризацију једначине (3.15) на различите начине. Посматрајући једначину (3.15) може се уочити да дијаметар електрона зависи од две променљиве физичке величине, напон U и струја I . Варирањем ова два параметра може се добити површ у (d^2, U, I) простору, одакле се може на нешто компликованији начин одредити вредност масеног наелектрисања електрона. Овде ћемо се послужити следећом методологијом. Фиксираћемо вредност струје на $I = 1\text{ А}$ и затим варирати вредност напона U у могућим границама. На тај начин ћемо добити криву која треба да има линеаран тренд (тј. праву). Цртањем графика и одрађивањем коефицијента правца можемо одредити однос e/m .

У табели 3-2 су приказане измерене вредности за одређивање пречника путање електрона у зависности од анодног напона, U_i , за јачуну струје која протиче кроз калемове $I = 1\text{ А}$. На лењиру причвршћеном за један од Хелмхолцових калемова се може очитати позиција снопа електрона на y оси. Те вредности обележимо са $x_{1,i}$ и $x_{2,i}$. Пречник, тј. дијаметар путање електрона можемо добити на основу релације :

$$d_i = x_{2,i} - x_{1,i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.26)$$

где је n број мерних тачака.

Грешка ове физичке величине се може изразити као:

$$\Delta d_i = \Delta d = \Delta x_{2,i} + \Delta x_{1,i} = 2\Delta x. \quad (3.27)$$

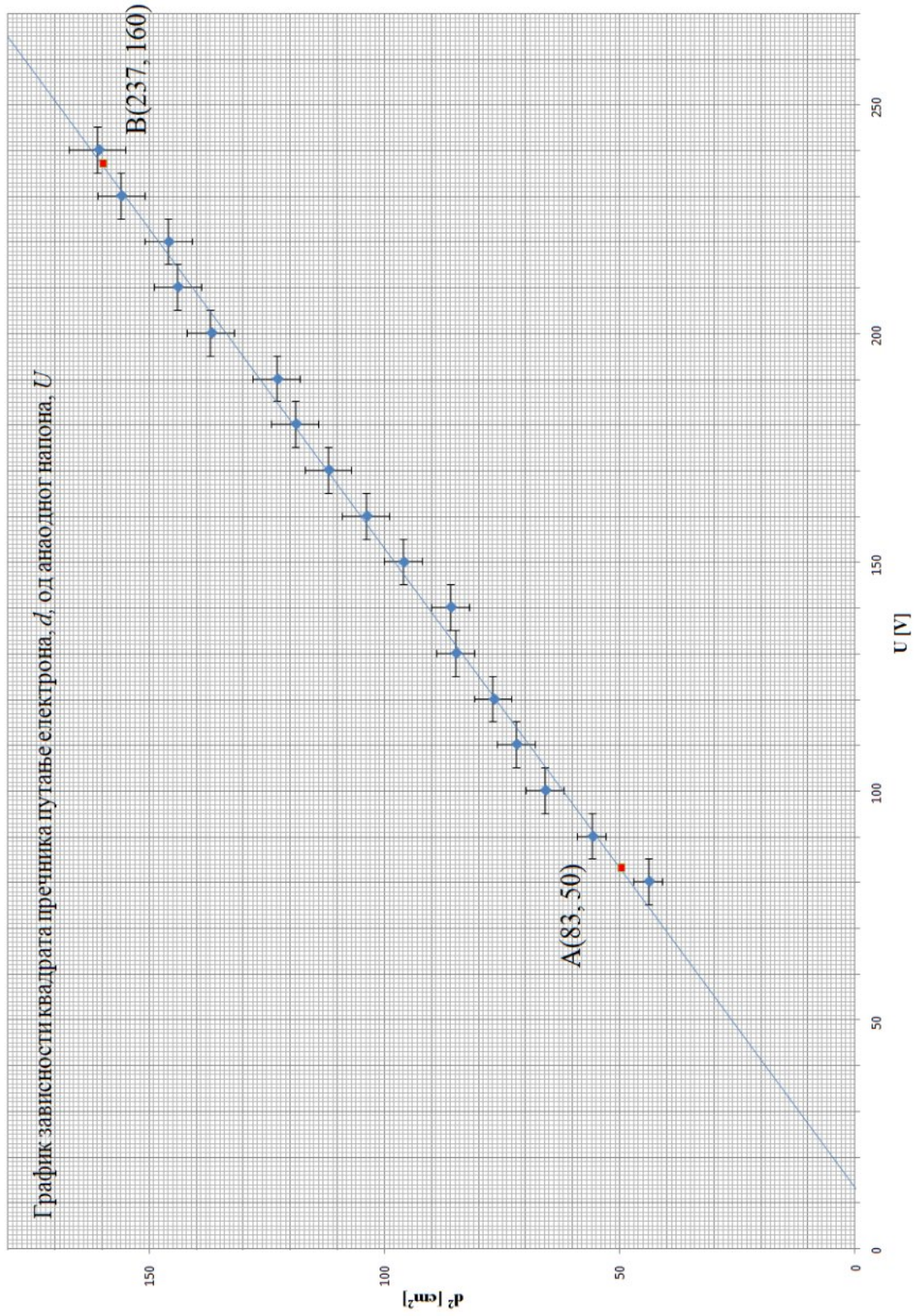
У једначини (3.19) фигурише d^2 , тако да је потребно одредити и вредност ове величине, као и припадајућу грешку:

$$\Delta(d_i^2) = 2d_i\Delta d \quad (3.28)$$

Табела 3-2: Експерименталне вредности за одређивање односа e/m . Грешке су заокруживане на првој сигурној цифри. Болдирано су претстављене заокружене вредности.

	I [A]	U [V]	x_1 [cm]	x_2 [cm]	d [cm]	Δd [cm]	d^2 [cm ²]	$\Delta(d^2)$ [cm ²]
1.	1	80	6.5	13.1	6.60 6.6	0.20 0.2	43.6 44	2.6 3
2.	1	90	6.3	13.8	7.50 7.5	0.20 0.2	56.3 56	3.0 3
3.	1	100	6.0	14.1	8.10 8.1	0.20 0.2	65.6 66	3.2 4
4.	1	110	5.8	14.3	8.50 8.5	0.20 0.2	72.3 72	3.4 4
5.	1	120	5.6	14.4	8.80 8.8	0.20 0.2	77.4 77	3.5 4
6.	1	130	4.9	14.1	9.20 9.2	0.20 0.2	84.6 85	3.7 4
7.	1	140	4.6	13.9	9.30 9.3	0.20 0.2	86.5 86	3.7 4
8.	1	150	4.1	13.9	9.80 9.8	0.20 0.2	96.0 96	3.9 4
9.	1	160	3.9	14.1	10.20 10.2	0.20 0.2	104.0 104	4.1 5
10.	1	170	3.7	14.3	10.60 10.6	0.20 0.2	112.4 112	4.2 5
11.	1	180	3.4	14.3	10.90 10.9	0.20 0.2	118.8 119	4.4 5
12.	1	190	3.3	14.4	11.10 11.1	0.20 0.2	123.2 123	4.4 5
13.	1	200	2.9	14.6	11.70 11.7	0.20 0.2	136.9 137	4.7 5
14.	1	210	2.7	14.7	12.00 12.0	0.20 0.2	144.0 144	4.8 5
15.	1	220	2.7	14.8	12.10 12.1	0.20 0.2	146.4 146	4.8 5
16.	1	230	2.4	14.9	12.50 12.5	0.20 0.2	156.3 156	5.0 5
17.	1	240	2.3	15.0	12.70 12.7	0.20 0.2	161.3 161	5.1 6

Сада је потребно нацртати график који представља функционалну зависност изражену једначином (3.19) и са њега графичком методом скинути коефицијент правца праве. График је приказан на слици 3-6



Слика 3-6: График зависности квадрата пречника путање електрона d , од анодног напона U

Са графика на слици 3-6 можемо одредити коефицијент правца праве тако што означимо две тачке на правој (једна између прве и друге тачке, а друга између претпоследње и последње) А и В, и то са координатама А(83,50) и В(237,160).

На основу једначине (3.20) можемо израчунати коефицијент правца праве и добијамо да је $k = 0.7142 \frac{V}{cm^2} \approx 0.714 \frac{V}{cm^2} \approx 0.00007 \frac{V}{m^2}$. Грешку за ову вредност рачунамо уз помоћ једначине (3.21) па као резултат имамо $\Delta k = 0.0988 \frac{V}{cm^2} \approx 0.099 \frac{V}{cm^2} \approx 0.00001 \frac{V}{m^2}$. Коначан резултат записујемо у облику $k = (0.714 \pm 0.099) \frac{V}{cm^2} \approx (0.00007 \pm 0.00001) \frac{V}{m^2}$ тј.

$$k = (0.7 \pm 0.1) \cdot 10^{-4} \frac{V}{m^2} \quad (3.29)$$

Када су нам коначно познате вредности коефицијента правца праве и његове грешке можемо преко релација (3.22) и (3.23) израчунати вредности масеног наелектрисања електрона $\frac{e}{m}$ и његове грешке $\Delta \frac{e}{m}$. Имамо да је $\frac{e}{m} = 1.08 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \approx 1.1 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$ и $\Delta \frac{e}{m} = 0.26 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \approx 0.3 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$. Коначно можемо писати:

$$\frac{e}{m} = (1.1 \pm 0.3) \cdot 10^{11} \frac{C}{kg} \quad (3.30)$$

3.5 Варирање анодног напона и струје магнетизације

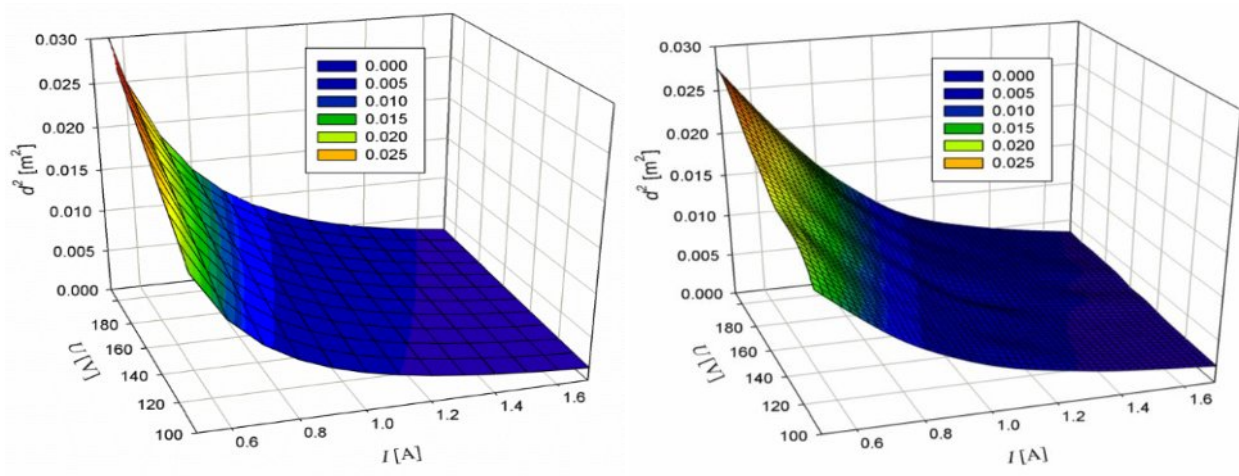
У претходном параграфу је одређена вредност масеног наелектрисања електрона фиксирањем струје магнетизације, тј. струје која протиче кроз калемове и индукује магнетно поље у коме се електрони крећу. Вредност јачине електричне струје је постављена на $I = 1A$. За тако фиксирану вредност струје анодни напон је вариран у распону од 70V до 210V. На тај начин релацијом (3.19) је добијена линеарна зависност

$d^2(U)$ одакле је одређена вредност масеног наелектрисања електрона. У експерименту, масено наелектрисање је функционална зависност од два параметара, U и I . Могуће је испитати зависност масеног наелектрисања варирањем оба параметра. То се може урадити фиксирајући један од два параметара и варирањем другог у могућим границама при чему треба забележити вредности d^2 . Затим у следећем кораку је потребно променити вредност првог и потом поново варирати други параметар у могућим границама. Овај поступак је потребно понављати док се не исцрпе могући опсези варијације оба параметара. У овоме раду струја магнетизације је варирана у опсегу вредности $I \in [0.5, 1.7][A]$, док је напон вариран у интервалу $U \in [100, 210][V]$. Једначина

(3.16) се може записати као $d^2 = 4.3 \cdot 10^{-5} \frac{U}{I^2} \frac{m^2 A^2}{V}$, што представља површ облика

$z = a \frac{x}{y^2}$ где је $a = 4.3 \cdot 10^{-5} \frac{m^2 A^2}{V}$. Ова површ је нацртана на слици 3-7а у горе наведеним

границама. Измерене су вредности дијаметра путање електрона при варирању анодног напона и струје магнетизације у горњим границама са кораком $\Delta U = 10V$ и $\Delta I = 0.1A$. Вредности су представљене у Табели 3-3 и Табели 3-4. На основу ових вредности нацртана је зависност квадрата дијаметра путање електрона од количника анодног напона и струје магнетизације. График је представљен на слици 3-7б.



Слика 3-7: а) Функција зависности квадрата дијаметра путање електрона на основу релације 3.16, теорија; б) График зависности квадрата дијаметра путање електрона на основу измерених вредности напона и струје - експеримент

Табела 3-3: Експериментални подаци (опсег напона 100V-150V)

$U[V]$	$I[A]$	$x_1[cm]$	$x_2[cm]$	d	$x_2 - x_1[cm]$
100	0.5	2.55	15.15		12.60
100	0.7	4.65	14.8		10.15
100	0.9	5.7	13.85		8.15
100	1.1	6.5	13.2		6.70
100	1.3	6.95	12.7		5.75
100	1.5	7.3	12.35		5.05
110	0.5	2.6	15.9		13.30
110	0.7	4.6	15.2		10.60
110	0.9	5.5	13.9		8.40
110	1.1	6.1	13.35		7.25
110	1.3	6.75	12.7		5.95
110	1.5	7.2	12.3		5.1
120	0.55	3.25	16.35		13.1
120	0.7	4.5	15.45		10.95
120	0.75	5.05	15.4		10.35
120	0.9	5.7	14.3		8.6
120	0.95	6.1	14.35		8.25
120	1.1	6.55	13.7		7.15
120	1.15	6.7	13.55		6.85
120	1.3	7.1	13.2		6.1
120	1.35	7.3	13.1		5.8
120	1.5	7.5	12.8		5.3
120	1.7	7.85	12.5		4.65
130	0.55	3.55	16.85		13.3
130	0.7	5	16.2		11.2
130	0.9	6	14.95		8.95
130	1.1	6.85	14.3		7.45
130	1.3	7.45	13.7		6.25
130	1.5	7.85	13.2		5.35
130	1.7	8.15	12.9		4.75
140	0.55	3.7	17.1		13.4
140	0.7	4.85	16.6		11.75
140	0.9	6.15	15.35		9.2
140	1.1	6.8	14.5		7.7
140	1.3	7.4	13.8		6.4
140	1.5	7.8	13.4		5.6
140	1.7	8.15	13.1		4.95
150	0.6	4	17.35		13.35
150	0.7	4.7	16.8		12.1
150	0.9	5.9	15.5		9.6
150	1.1	6.9	14.1		7.2
150	1.3	7.3	13.9		6.6
150	1.5	7.65	13.65		6
150	1.7	8	13.2		5.2

Табела 3-4: Експериментални подаци (опсег напона 160V-210V)

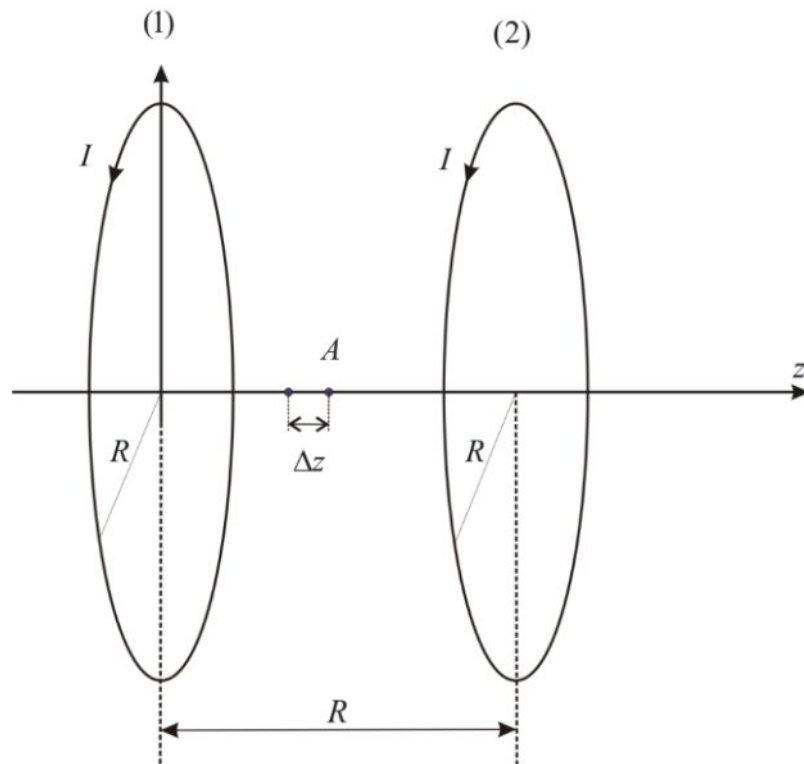
$U[V]$	$I[A]$	$x_1[cm]$	$x_2[cm]$	d	$x_2 - x_1[cm]$
160	0.6	3.8	17.4		13.60
160	0.7	4.7	17.0		12.30
160	0.9	5.85	15.6		9.75
160	1.1	6.7	14.7		8.00
160	1.3	7.2	14.0		6.80
160	1.5	7.7	13.6		5.90
160	1.7	8.0	13.2		5.20
170	0.7	4.6	17.3		12.70
170	0.9	5.7	15.8		10.10
170	1.1	6.6	14.7		8.20
170	1.3	7.0	14.0		7.00
170	1.5	7.35	13.6		6.25
170	1.7	7.6	13.15		5.55
180	0.7	4.25	17.4		13.15
180	0.9	5.5	15.8		10.30
180	1.1	6.3	14.7		8.40
180	1.3	7.0	14.1		7.10
180	1.5	7.3	13.6		6.30
180	1.7	7.6	13.2		5.60
190	0.7	4.1	17.6		13.50
190	0.9	5.3	15.95		10.65
190	1.1	6.3	14.75		8.45
190	1.3	6.8	14.1		7.30
190	1.5	7.3	13.6		6.30
190	1.7	7.6	13.3		5.70
200	0.9	5.25	16.0		10.75
200	1.1	6.1	14.9		8.80
200	1.3	6.65	14.1		7.45
200	1.5	7.25	13.7		6.45
200	1.7	7.6	13.3		5.70
210	0.9	5.05	16.2		11.15
210	1.1	6.1	15.0		8.90
210	1.3	6.7	14.3		7.60
210	1.5	7.2	13.85		6.65
210	1.7	7.5	13.35		5.85

Упоредјујући графике на слици 3-7 може се видети одлично слагање експеримента са теоријски предвиђеним вредностима.

3.6 Магнетно поље Хелмхолцових калемова

У параграфу 3.2 релација која одређује индукцију магнетног поља калемова је теоријски одређена. Тачка у којој се посматра индукција магнетног поља се налази на оси која је нормална на калемове и налази се на половини растојања између калемова. Сам стаклени балон је смештен на средини између калемова. Међутим електрони се крећу по кружној путањи у равни паралелној калемовима. У овом поглављу ћемо показати да је магнетно поље у простору између калемова у коме се крећу електрони прилично хомогено,[24].

Због симетрије проблема могуће је теоријски показати да незнатно одступање од средишње тачке на оси не мења вредност индукције магнетног поља. Посматрајмо две струјне контуре које одговарају конфигурацији Хелмхолцових калемова, (слика 3-8).



Слика 3-8: Шема конфигурације Хелмхолцових калемова

У тачки А индукција магнетног поља једног од намотаја калемова на основу релације (3.11) износи:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.31)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (3.32)$$

где је $z = R/2$. У Δz околини тачке А индукција магнетног поља износи:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - \Delta z \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (3.33)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} + \Delta z \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (3.34)$$

Развијмо индукцију магнетног поља у Маклоренов ред у околини тачке $\Delta z = 0$. Како је Δz мала вредност можемо одбацити квадратни и остале чланове реда.

$$B_1 = B_1(\Delta z = 0) + B_1'(\Delta z = 0) \frac{\Delta z}{1!} + B_1''(\Delta z = 0) \frac{\Delta z^2}{2!} + \dots, \quad (3.35)$$

$$B_1 \approx B_1(\Delta z = 0) + B_1'(\Delta z = 0) \Delta z, \quad (3.36)$$

$$B_1 \approx \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4} \right)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left[\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - \Delta z \right)^2 \right)^{-3/2} \right]_{\Delta z = 0} \Delta z, \quad (3.37)$$

$$B_1 \approx \frac{4\sqrt{5}\mu_0 I}{25R} \left(1 + \frac{6\Delta z}{5R} \right). \quad (3.38)$$

На исти начин за B_2 се добија:

$$B_2 \approx \frac{4\sqrt{5}\mu_0 I}{25R} \left(1 - \frac{6\Delta z}{5R}\right). \quad (3.39)$$

Укупна јачина магнетног поља у околини тачке A износи

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2. \quad (3.40)$$

Како су \vec{B}_1 и \vec{B}_2 колинеарни, важи да је магнетна индукција у Δz околини тачке A

$$B = \frac{4\sqrt{5}\mu_0 I}{25R} \left(1 + \frac{6\Delta z}{5R}\right) + \frac{4\sqrt{5}\mu_0 I}{25R} \left(1 - \frac{6\Delta z}{5R}\right), \text{ тј.} \quad (3.41)$$

$$B = \frac{8\sqrt{5}\mu_0 I}{25R}. \quad (3.42)$$

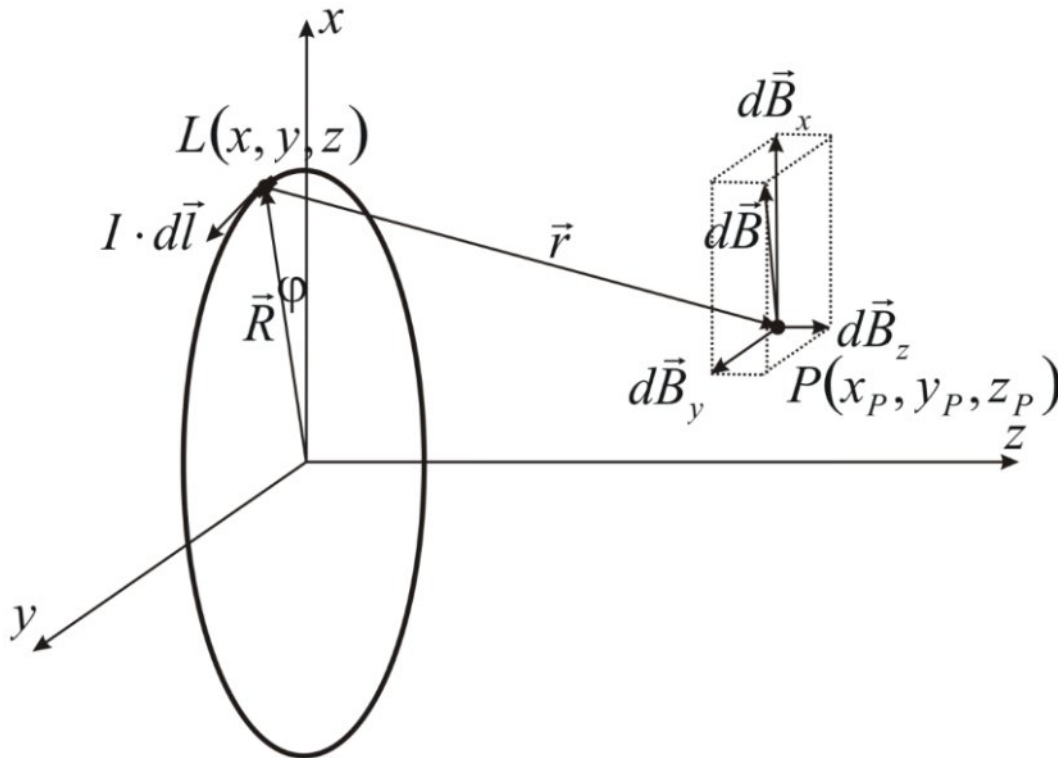
За N намотаја релација (3.42) има облик

$$B = \frac{8\sqrt{5}N\mu_0 I}{25R} \quad (3.43)$$

Горња релација која представља вредност индукције магнетног поља у околини тачке Δz , где су квадратни и виши чланови у развоју занемарени има исту вредност као индукција магнетног поља у тачки A , релација (3.13), на основу чега се може закључити да интезитет индукције магнетног поља је константан у околини тачке A .

3.6.1 Магнетно поље Хелмхолцових калемова у произвољној тачки простора

Посматрајмо индукцију магнетног поља једне кружне струјне контуре у произвољној тачки простора, $P(x_p, y_p, z_p)$. Координатни систем поставимо тако да се координатни почетак поклапа са центром котуре која лежи у xOy равни, као на слици 3-9.



Слика 3-9: Индуција магнетног поља кружног проводника у произвољној тачки простора

Полазећи од Био-Савар-Лапласовог закона, индуција магнетног поља у тачки P од једног струјног елемента $Id\vec{l}$ у тачки $L(x, y, z)$ се може изразити као

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.44)$$

где је $\vec{r} = r_x\vec{e}_x + r_y\vec{e}_y + r_z\vec{e}_z$ радијус вектор са почетком у тачки L и крајем у посматраној тачки P . Његове компоненте се могу одредити релацијом:

$$\begin{aligned} r_x &= x_p - x \\ r_y &= y_p - y, \text{ тј.} \\ r_z &= z_p \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\vec{r} = (x_p - x)\vec{e}_x + (y_p - y)\vec{e}_y + z_p\vec{e}_z. \quad (3.46)$$

Интензитет овог вектора износи

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + z_p^2}. \quad (3.47)$$

Елемент криве $d\vec{l}$ који фигурише у релацији (3.44), у цилиндричном координатном систему можемо записати једначином:

$$d\vec{l} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z. \quad (3.48)$$

Како се ради о кружници ($d\rho = 0, dz = 0$) елемент криве добија облик $d\vec{l} = \rho d\varphi\vec{e}_\varphi$.

Преласком на Декартове координате орт вектор \vec{e}_φ можемо изразити као:

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y, \text{ па је} \quad (3.49)$$

$$d\vec{l} = \rho d\varphi(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y) = -\rho\sin\varphi d\varphi\vec{e}_x + \rho\cos\varphi d\varphi\vec{e}_y, \quad (3.50)$$

где је $\rho = R$ и долазимо до израза:

$$d\vec{l} = -R\sin\varphi d\varphi\vec{e}_x + R\cos\varphi d\varphi\vec{e}_y. \quad (3.51)$$

Сада индукцију магнетног поља у тачки P можемо изразити као:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(-R\sin\varphi d\varphi\vec{e}_x + R\cos\varphi d\varphi\vec{e}_y) \times ((x_p - x)\vec{e}_x + (y_p - y)\vec{e}_y + z_p\vec{e}_z)}{r^3}. \quad (3.52)$$

Како важе релације

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= 0, \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x &= -\vec{e}_z, \vec{e}_y \times \vec{e}_y = 0, \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \end{aligned} \quad (3.53)$$

Комбинујући (3.52) и (3.53) добијамо:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (-R\sin\varphi d\varphi(y_p - y)\vec{e}_z - R\sin\varphi d\varphi z_p(-\vec{e}_y) + R\cos\varphi d\varphi(x_p - x)(-\vec{e}_z) + R\cos\varphi d\varphi z_p\vec{e}_x) \quad (3.54)$$

Скаларне једначине које одређују компоненте индукције магнетног поља су:

$$\begin{aligned} d\vec{B}_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R\cos\varphi z_p d\varphi \\ d\vec{B}_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R\sin\varphi z_p d\varphi \\ d\vec{B}_z &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (\sin\varphi(y_p - y) + \cos\varphi(x_p - x))R d\varphi \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ове једначине одређују индукцију магнетног поља у тачки P од једног струјног елемента $Id\vec{l}$. Како би се одредила укупна индукција магнетног поља у посматраној тачки од читаве струјне контуре потребно је извршити интеграцију по читавој струјној контури.

$$B_x = \int_0^{2\pi} dB_x; \quad B_y = \int_0^{2\pi} dB_y; \quad B_z = \int_0^{2\pi} dB_z. \quad (3.56)$$

Решавање горњих интеграла за општи случај, тј. за произвољну тачку P није могуће извршити аналитички, јер се изрази свде на елиптичке интеграле. Решења горњих интеграла је могуће одредити нумеричком интеграцијом. Како би смо имали увид у методу нумеричке интеграције запишимо дефиницију одређеног интеграла произвољне функције:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x)\Delta x, \quad (3.57)$$

где је Δx елемент поделе интервала $[a, b]$. Уколико је Δx константно може изаћи испред суме. Интеграл са леве стране једначине (3.57) можемо заменити сумом на десној страни исте једначине и сумирање се може извршити нумерички, уколико услов $\Delta x \rightarrow 0$ замени са коначном вредношћу Δx која се мора узети веома малом. Интеграле у једначини (3.56) можемо апроксимирати коначним сумама:

$$\begin{aligned} B_x &= \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R \cos \varphi_i z_p \Delta \varphi \\ B_y &= \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} R \sin \varphi_i z_p \Delta \varphi \\ B_z &= -\sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (\sin \varphi_i (y_p - y) + \cos \varphi_i (x_p - x)) R \Delta \varphi \end{aligned}, \quad (3.58)$$

где текуће координате елемента криве можемо изразити преко угла φ :

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi_i \\ y &= R \sin \varphi_i \end{aligned}. \quad (3.59)$$

Полупречник путање електрона је одређен релацијом (3.47) и заменом у (3.58) добија се:

$$\begin{aligned}
 B_x & \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cos \varphi_i z_p \Delta \varphi}{\left((x_p - R \cos \varphi_i)^2 + (y_p - R \sin \varphi_i)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}} \\
 B_y & \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \sin \varphi_i z_p \Delta \varphi}{\left((x_p - R \cos \varphi_i)^2 + (y_p - R \sin \varphi_i)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}} \\
 B_z & - \sum_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(\sin \varphi_i (y_p - R \sin \varphi_i) + \cos \varphi_i (x_p - R \cos \varphi_i)) R \Delta \varphi}{\left((x_p - R \cos \varphi_i)^2 + (y_p - R \sin \varphi_i)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}}
 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Уколико је елемент поделе $\Delta \varphi$ интервала $\varphi \in [0, 2\pi]$ константан, можемо га изразити преко броја елемената поделе, N :

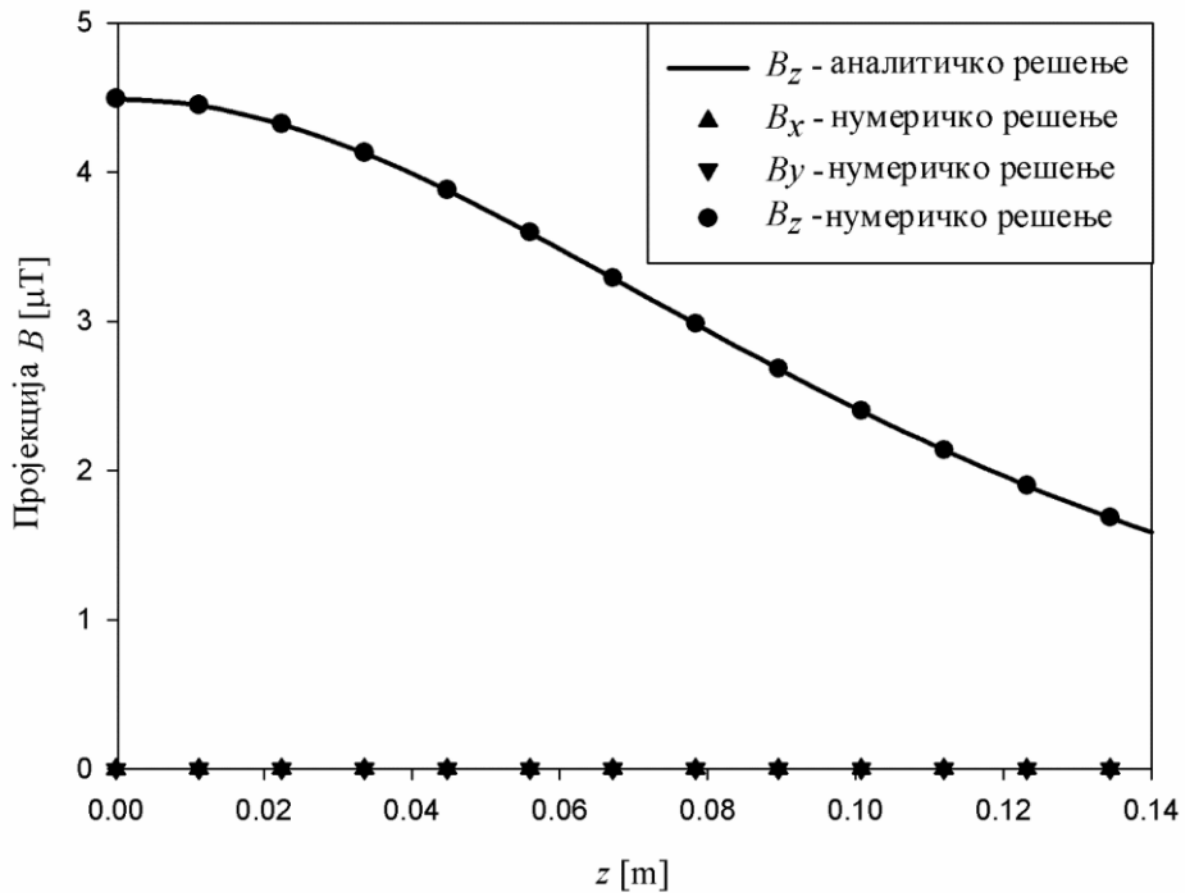
$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{N}. \quad (3.61)$$

У том случају можемо писати $\varphi_i = i\Delta\varphi, i = \overline{1, N}$ и једначине (3.60) можемо изразити у коначном облику као:

$$\begin{aligned}
 B_x & \sum_{i=0}^N \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) z_p \frac{2\pi}{N}}{\left(\left(x_p - R \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + \left(y_p - R \sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}} \\
 B_y & \sum_{i=0}^N \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R \sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) z_p \frac{2\pi}{N}}{\left(\left(x_p - R \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + \left(y_p - R \sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}} \\
 B_z & - \sum_{i=0}^N \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\left(\sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \left(y_p - R \sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right) + \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \left(x_p - R \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right) \right) R \frac{2\pi}{N}}{\left(\left(x_p - R \cos\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + \left(y_p - R \sin\left(i \frac{2\pi}{N}\right) \right)^2 + z_p^2 \right)^{3/2}}
 \end{aligned} \quad (3.62)$$

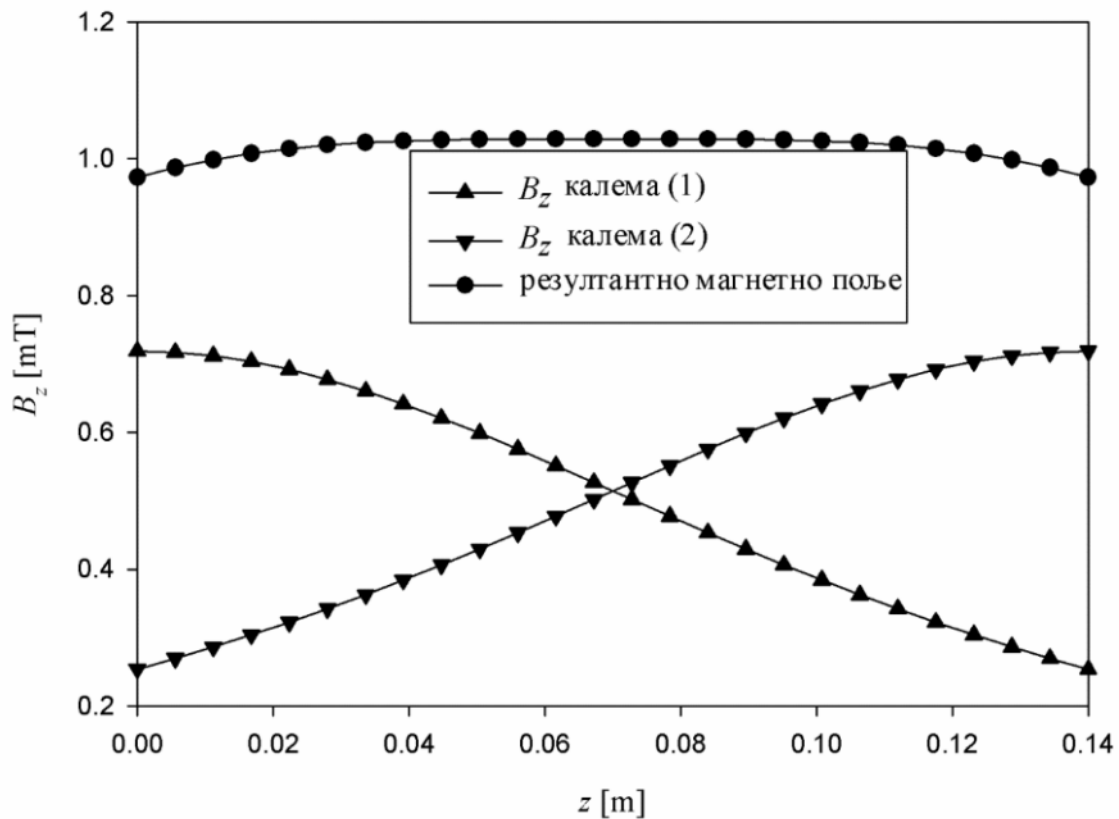
Користећи једначине (3.62) можемо одредити индукцију магнетног поља у произвољној тачки. На почетку упоредимо нумеричка решења са аналитичким изразом индукције магнетног поља који је изведен у претходној глави и дат једначином (3.11). У ту сврху написан је програм у Фортрану који је приложен у **Додатку А**.

На слици 3-10 су приказане вредности пројекције индукције магнетног поља у тачкама дуж z -осе, од једне струјне контуре, одређене релацијама датим у изразу (3.60). Магнетно поље је одређено за један струјни намотај кроз који протиче струја од 1А. Може се видети да су пројекције дуж x и y осе једнаке нули. Непрекидном линијом је претстављена индукција магнетног поља дуж z -осе израчунат на основу аналитичког решења датог једначином (3.11). Може се видети идеално слагање вредности. Детаљи о прорачуну су дати у **Додатку А**.



Слика 3-10: Вредности пројекције индукције магнетног поља у тачкама дуж z -осе, од једне струјне контуре

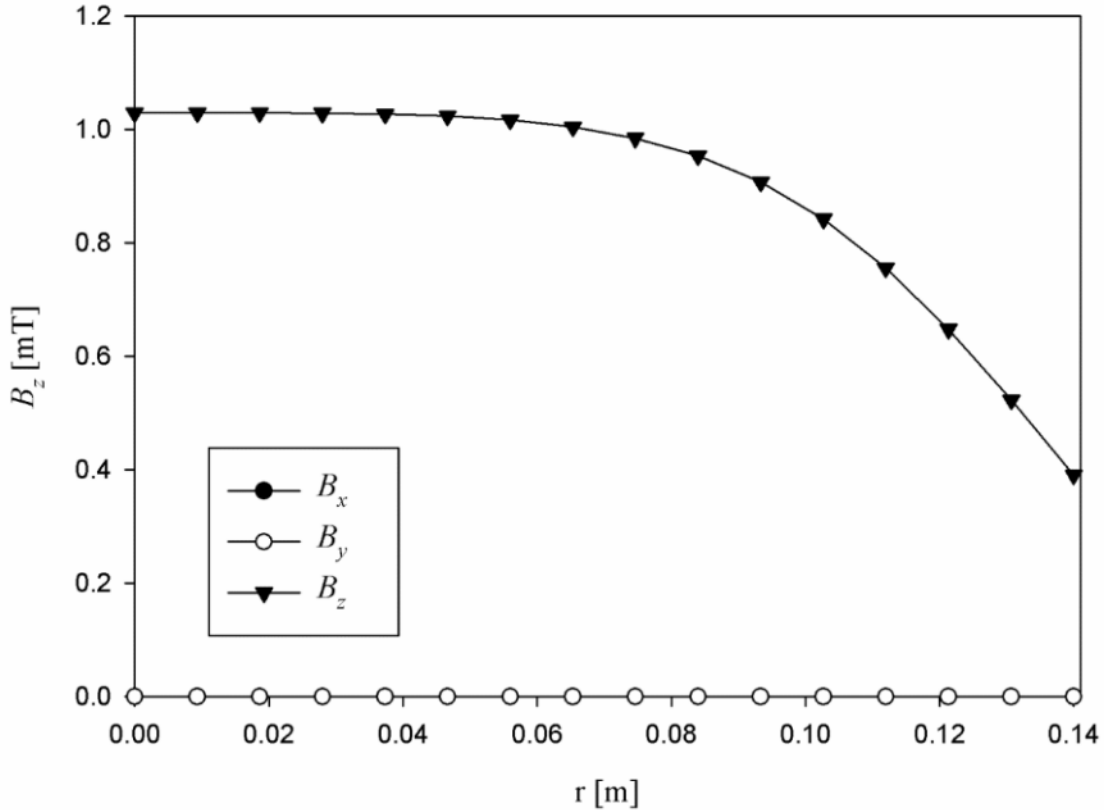
Конфигурација Хелмхолцових калемова је таква да постоје два симетрична калема, као на слици 3-8 са по $N = 160$ намотаја, [24]. На слици 3-11 је приказана индукција магнетног поља у оваквој конфигурацији једног и другог калема, као и укупно магнетно поље. Како дуж z осе постоји само B_z компонента, једино она је и приказана. Кроз калемове је узето да протиче струја $I = 1$ А у истом смеру. Магнетно поље дуж z осе је прилично хомогено, поготово у средишњем делу између Хелмхолцових калемова где се крећу електрони.



Слика 3-11: Вредности пројекције индукције магнетног поља у тачкама дуж z -осе од једног и другог калема, као и укупно магнетно поље

Како је брзина електрона нормална на индукцију магнетног поља, која је узета у правцу z осе, електрони се крећу у виду кружне путање која је у равни нормалној на z осу, тј. у xOy равни. У том случају не долази до промене z координате путање електрона и она износи $z = R/2$. За различите вредности струје и анодног напона радијус путање електрона се може мењати. Зато је доста битније испитати хомогеност магнетног поља у

равни $z = R/2$. На слици 3-12 је приказана зависност пројекције индукције резултантног магнетног поља у зависности од растојања од z осе, тј. радијуса по којем се крећу електрони, у случају када кроз $N = 160$ намотаја калемова протиче струја $I = 1\text{ A}$, [24].



Слика 3-12: Пројекција индукције резултантног магнетног поља у зависности од растојања од z осе, тј. радијуса по којем се крећу електрони, у случају када кроз $N = 160$ намотаја калемова протиче струја $I = 1\text{ A}$.

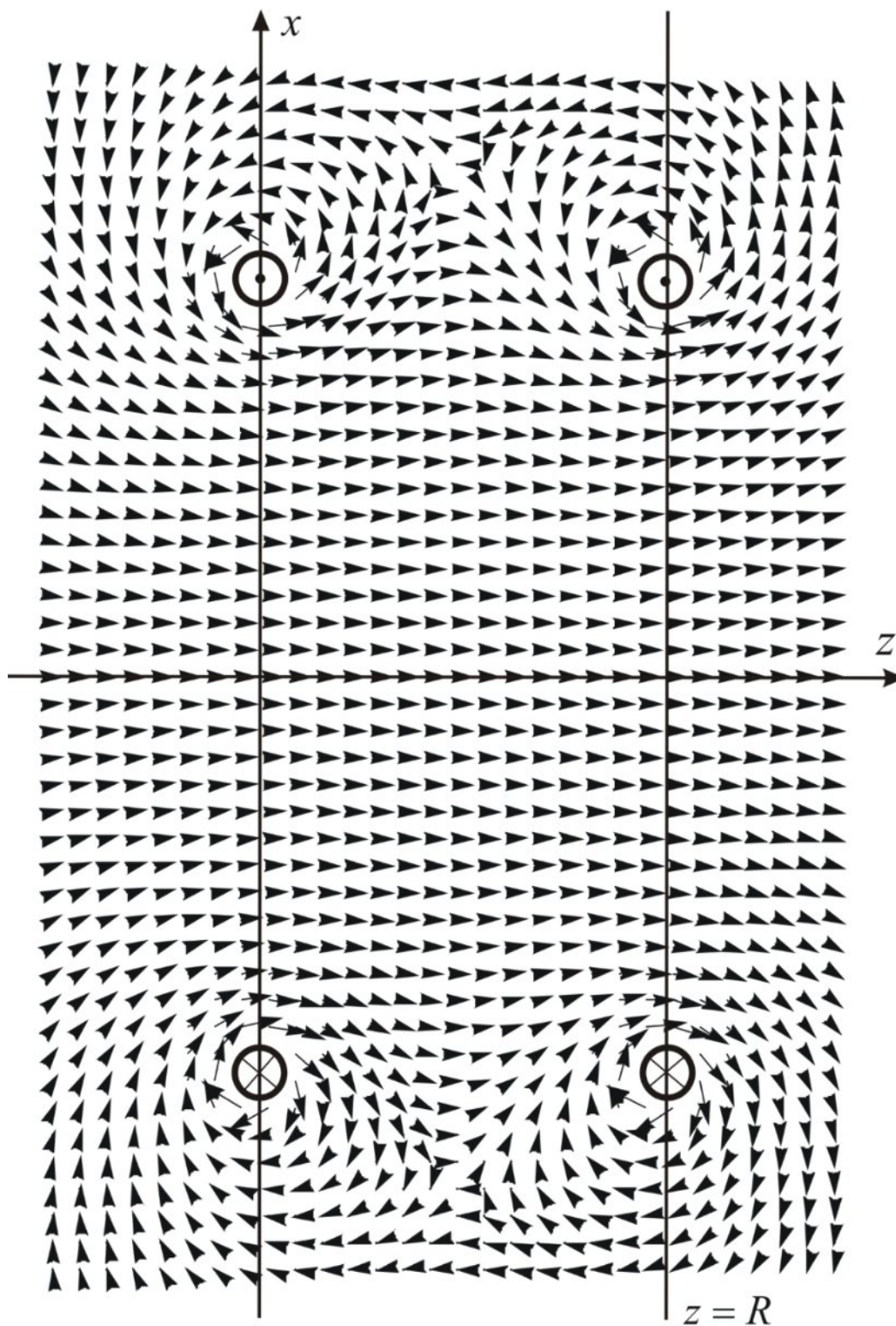
Стаклени балон у коме се крећу електрони је радијуса доста мањег од радијуса Хелмхолцових калемова. Унутар стакленог балона електрони могу да се крећу по кружним путањама чији радијус не превазилази 8cm, [24]. Са слике 3-12 се може видети да је индукција магнетног поља у том делу простора између калемова изузетно хомогена, што оправдава чињеницу да се за индукцију магнетног поља узима вредност на z осе, у тачки $z = R/2$. До радијуса путање електрона од 4cm магнетно поље се разликује од вредности на z осе до једног промила. Од 4–6cm разлика индукције магнетног поља у

односу на вредност на z оси расте до 1% , да би на 8cm од z осе магнетно поље ослабило за 5% . На основу релације (3.5) могуће је изразити релативну грешку масеног наелектрисања електрона као:

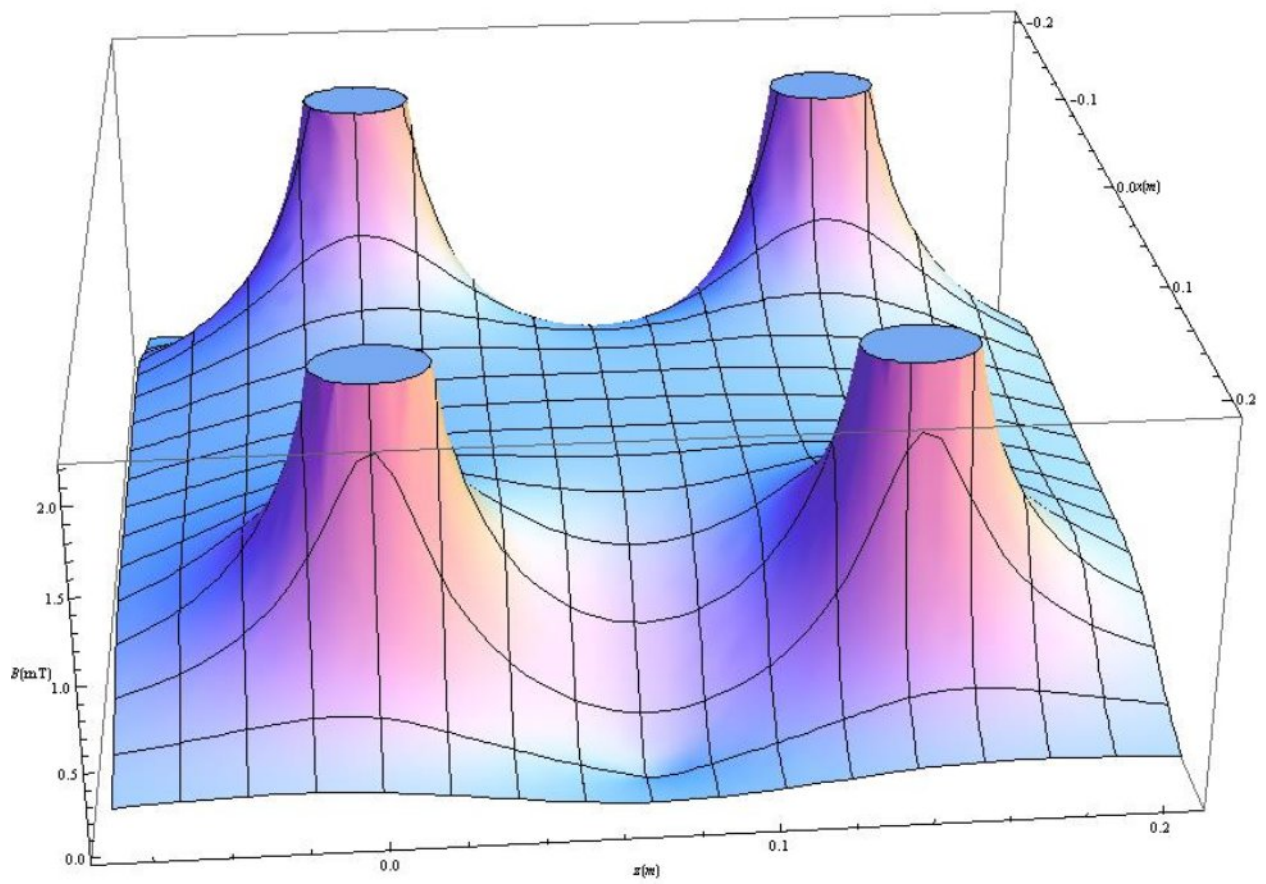
$$\delta(e/m) = \frac{\Delta U}{U} + 2\frac{\Delta B}{B} + 2\frac{\Delta d}{d}. \quad (3.63)$$

У релативну грешку одређивања масеног наелектрисања релативна грешка индукције магнетног поља улази двоструком вредношћу, што за електроне блиске ивици стакленог балона износи око 10% . За детаљнију анализу и тачније представљање резултата потребно је у грешку за индукцију магнетног поља узети у обзир и овај вид несигурности. Како би се минимизирала грешка треба узети путање електрона са мањим радијусом. На другој страни са смањењем радијуса повећава се несигурност одређивања дијаметра путање, чија релативна грешка износи од 2.5% за радијус од 4cm до 1.4% , за радијус од 7cm. Како ова релативна грешка има двоструки допринос релативној грешки масеног наелектрисања, несигурност мерења дијаметра путање електрона има удео од 5% до 3% идући од мањих вредности дијаметара ка већим. Релативна грешка мерења анодног напона је мања од једног процента, али се код одређивања брзине електрона мерећи убрзавајући напон јавља додатна несигурност која је раније описана.

На слици 3-13 је приказан векторски дијаграм индукције магнетног поља у xOz равни. Стрелице вектора на слици 3-13 су веће од самих вектора и прекривају њихов интензитет. Векторски дијаграм је приказан како би се уочиле линије сила које формирају стрелице вектора. Одавде се такође можемо уверити у хомогеност магнетног поља, на основу густина линија сила. Како би овај приказ био јаснији на слици 3-14 је приказан дијаграм интензитета индукције магнетног поља као у случају на слици 3-13. Магнетно поље калемова је у великој мери хомогено и за одређивање вредности масеног наелектрисања у оквиру лабораторијских вежби није потребно вршити корекцију вредности магнетног поља. Притом се мора водити рачуна да релативна грешка одређивања масеног наелектрисања би требала због додате несигурности бити увећана до 10% .



Слика 3-13: Векторски дијаграм индукције магнетног поља калемова у xOz равни за струју магнетизације од 1А



Слика 3-14: Дијаграм интензитета индукције магненог пољакалемова у xOz равни за струју магнетизације од 1А

4 Одређивање наелектрисања електрона Миликеновим експериментом

Роберт Миликен (*Robert Andrews Millikan*) је био амерички физичар рођен 1868. године. Похађао је Оберлински колеџ и докторирао је 1895. на Колумбија универзитету. Од 1921. до 1945. руководио је физичком лабораторијом Калифорнијског технолошког института Калтек (*Caltech*). У првим истраживањима бавио се рендгенским зрачењем и слободним ширењем гасова. Године 1910. одредио је наелектрисање електрона. Такође је веома познат његов рад на експерименталној потврди фотоелектричног ефекта. Године 1923. добио је Нобелову награду за одређивање елементарног наелектрисања и истраживање фотоелектричног ефекта. Експеримент за Нобелову награду односи се на експериментално одређивање Планкове (*Planck*) константе (помоћу једначине коју је 1905. поставио Ајнштајн (*Albert Einstein*) за фотоелектрични ефекат) и елементарног наелектрисања (меривши брзину наелектрисане капљице уља у електричном пољу, слика 4-1). Бавио се и космичким зрацима за које је доказао да долазе из свемира. Умро је 1953. у граду Сан Марино у Калифорнији.



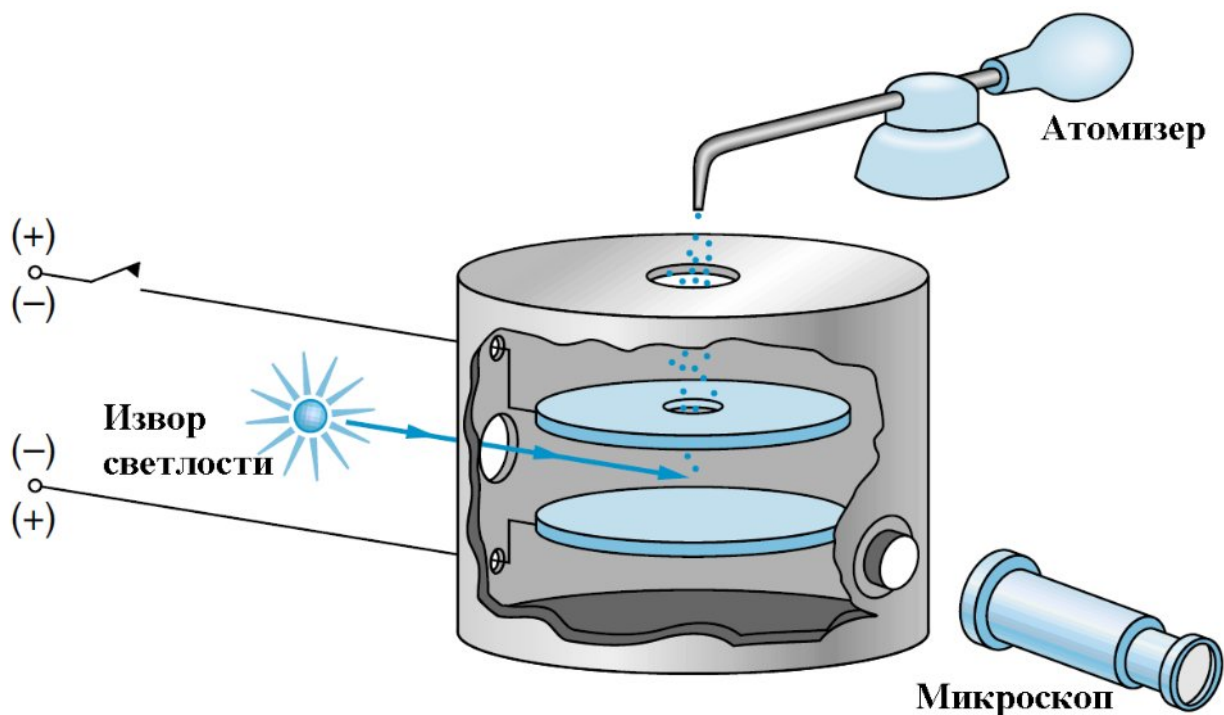
Слика 4-1: Изглед Миликеновог експеримента помоћу којег је посматрао капљице уља

Миликенов експеримент има велики историјски значај јер је први који је дао вредност наелектривања електрона са малом релативном грешком. Мерење наелектривања електрона заснива се на мерењу брзине падања наелектриване капи кроз ваздух у присуству електричног поља. Мењајући поларитет и јачину електричног поља може се наелектривана кап у потпуности зауставити или чак покренути у смеру супротном деловању силе земљине теже (навише).

4.1 Апаратура

За одређивање наелектривања електрона користићемо апаратуру по аналогији на Миликенов експеримент, [24], чији је шематски приказ дат на слици 4-2. Апаратура се састоји из три основна дела:

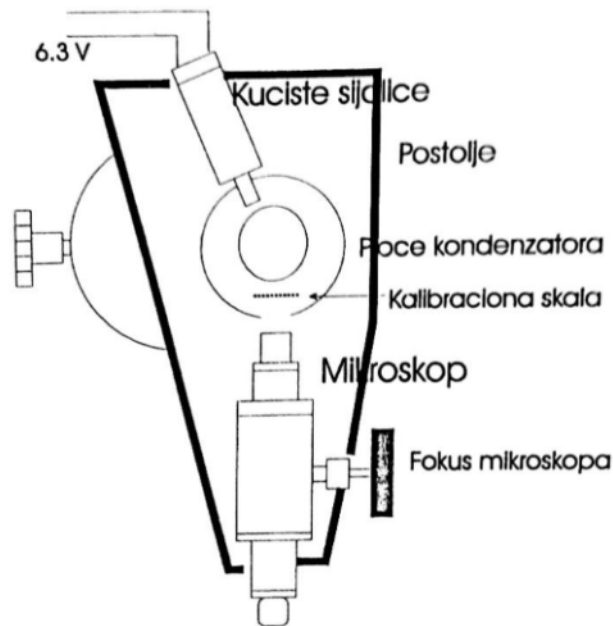
- a) микроскоп са кондензатором, слика 4-3;
- b) извор високог и ниског напона;
- c) потенциометар, слика 4-4.



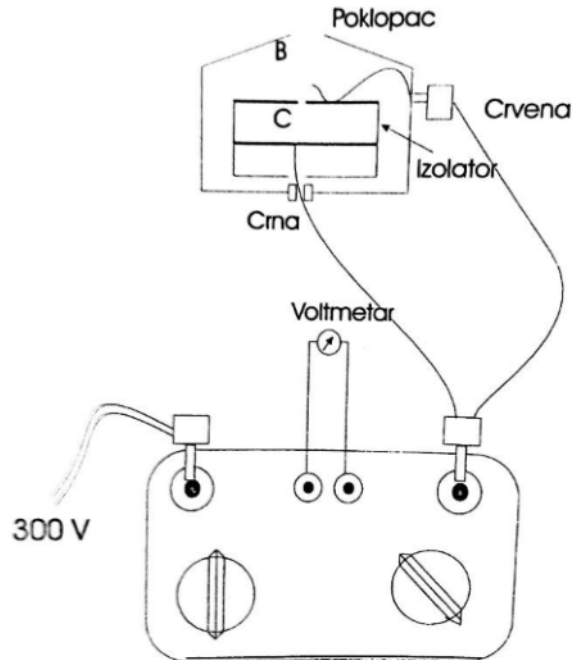
Слика 4-2: Шематски приказ Миликеновог експеримента

У овом експерименту кап уља се убацује у простор између паралелних плоча кроз танак отвор С, слика 4-4. Кап се посматра помоћу микроскопа. Да би капи биле видљиве микроскопом оне се осветљавају из посебног извора светлости и посматрач види светлост расејану са капљица. У видном пољу микроскопа капи се појављују у виду звездица, које се услед обрнутог лика код микроскопа, крећу на више (у стварности капи падају). Капи се могу наелектрисати, због тога што је ваздух јонизован или просто услед трења, [24].

На контролној јединици се налази прекидач (лево на слици 4-4) који има три положаја. Када је тај прекидач у централном положају (означен са N) онда су плоче кондензатора кратко спојене и нема електричног поља у кондензатору. Ако је прекидач у левом или десном положају онда има напона на плочама кондензатора али је у ова два положаја поларитет плоча обрнут. Поларитет напона на плочама, када је прекидач у положају лево, је супротан од поларитета када је прекидач у положају десно. Десни прекидач на контролној јединици служи као потенциометар за континуалну промену напона на плочама кондензатора.



Слика 4-3: Постоље са микроскопом, кондензатором и кућиштем сијалице код Миликеновог експеримента



Слика 4-4: Контролна јединица напона и кондензатор

4.2 Одређивање наелектрисања електрона

Капи уља које се распршују између плоча кондензатора су најчешће наелектрисане услед трења и судара капљица приликом самог распршивања. Капљице је могуће додатно наелектрисати употребом радиоактивног извора. Како су капи наелектрисане на њих можемо деловати силом електричног поља које постоји између плоча кондензатора када је између њих примењен напон. Под дејством електричне силе кретањем капљице се може манипулисати. То нам омогућава да одредимо наелектрисање капљице уколико можемо мерити њену брзину и напон између плоча кондензатора. Поред електричне силе на капљицу делују и сила Земљине теже, Архимедова сила потиска и Стоксова сила вискозног трења, [24].

Случај 1: Слободан пад

Претпоставимо да је кап сферног облика. На сферу која слободно пада кроз неку вискозну средину (у овом случају то је ваздух) делује сила отпора дата Стоксовим (*Stokes*) законом

$$F_S = 6\pi\eta av, \quad (4.1)$$

где је η коефицијент вискозности, a је полупречник сфере и v је брзина сфере. На кап делује вертикално наниже и сила земљине теже која је једнака

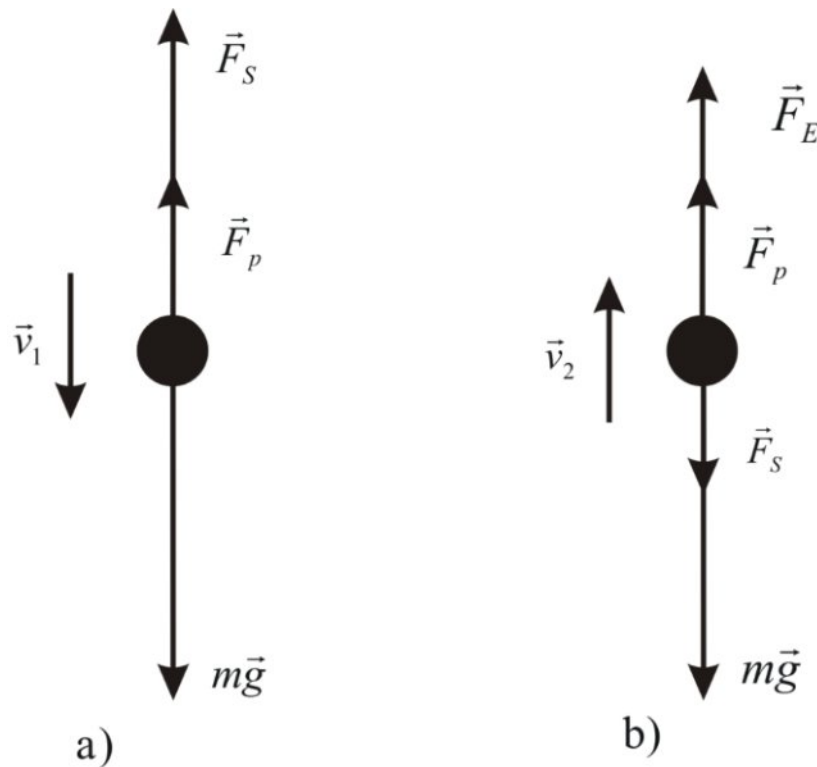
$$F_g = mg = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g, \quad (4.2)$$

где је ρ густина материјала сфере и g је убрзање земљине теже.

Поред ових двају сила делује још и сила потиска која је по Архимедовом закону једнака

$$F_p = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v g, \quad (4.3)$$

где је ρ_v густина ваздуха. Ове силе су приказане на слици 4-4а.



Слика 4-5 Кретање капљице код Миликеновог експеримента: а) капљица слободно пада б) капљица се креће вертикално навише под дејством електричног поља

Како је Стоксова сила пропорционална брзини капљице, при убрзаном кретању, са порастом брзине повећаваће се и Стоксова сила, све док се силе које делују на капљицу не уравнотеже. Надаље, кретање ће бити равномерно. Ово је показано у **Додатку Б**. У случају да се силе уравнотеже, онда тело пада вертикално наниже константном брзином и важи једначина

$$mg = F_p + F_s. \quad (4.4)$$

При томе потребно је познавање густине ваздуха и материјала сфере, коефицијента вискозности ваздуха и брзине кретања сфере. Величина која се директно мери експериментално је време за које капљица пређе познато растојање.

Радијус капљица у Миликеновом експерименту је реда величине микрометра или чак делова микрометра. За тако мале капљице, Стоксов закон вискозног трења треба кориговати. Наиме, при деловању силе вискозног трења, подразумева да се тело на које средина делује вискозном силом креће у континуалном медиуму. Код течности је овај услов испуњен јер су међумолекулска растојања веома мала. Међутим у случају гасова, средњи слободни пут молекула ваздуха је реда величине делова микрометра. Због тога долазимо у ситуацију да се капљица не креће у континуалном медиуму, већ види „празнине“ између молекула ваздуха. Приликом извођења Стоксовог закона вискозног трења за кретање тела сферног облика у произвољном медиуму, следеће претпоставке су начињене:

1. нехомогености средине су веома мале у поређењу са величином сферног тела;
2. средина кроз коју се крећу сфере је веома већих димензија од саме сфере, како би се могло сматрати да се тело креће у безграничној средини;
3. сфера је глатка и крута;
4. не долази до клизања делова средине по површини сфере;
5. брзина кретања сфере је довољно мала, да се може узети да трење услед кретања потиче само од вискозности средине.

У случају малих капи, претпоставке 2, 3, 4 и 5 су задовољене. Међутим ставка 1. није у потпуности задовољена, јер радијус капљица није много већи од средњег слободног пута молекула.

При кретању кроз простор између молекула ваздуха силе вискозног трења не делују, због чега се ефективно мора умањити коефицијент вискозног трења, η , [23]:

$$\eta = \frac{\eta}{1 + A \frac{l}{a}}, \quad (4.5)$$

где је l средњи слободни пут молекула ваздуха, а A бездимензиони корекциони фактор. Како средњи слободни пут молекула ваздуха зависи од ваздушног притиска, релација (4.5) се може изразити у погоднијој форми:

$$\eta' = \frac{\eta}{1 + \frac{b}{pa}}, \quad (4.6)$$

где је p атмосферски притисак, а $b = 6.17 \cdot 10^{-5} [m \cdot mm \text{ Hg}]$ константа. Комбиновањем релација (4.1), (4.4) и (4.6) добијамо релацију:

$$a^2 + \frac{b}{p}a - \frac{9\eta v l}{2(\rho - \rho_v)g}. \quad (4.7)$$

Из горње релације радијус капљице се мора одредити решавањем квадратне једначине, где решење са знаком „+“ има физички смисао (радијус капљице не може бити негативан). Радијус капљице се коначно може изразити као:

$$a = \frac{b}{2p} \left(\sqrt{1 + \frac{18\eta p^2 v l}{(\rho - \rho_v)g b^2}} - 1 \right). \quad (4.8)$$

Случај 2: Кретање у електричном пољу

Надаље можемо применом спољашњег електричног поља манипулисати кретањем капљице и из тог услова одредити њено наелектрисање. Ако је кап наелектрисана количином наелектрисања q , онда применом спољашњег електричног поља јачине E , на капљицу може деловати додатна сила електричног поља која у зависности од поларитета кондензатора и знака наелектрисања може имати смер у правцу силе Земљине теже или супротан. Нека се електрично поље остварује у кондензатору са паралелним плочама између којих је растојање d , а напон између плоча је U .

Уколико се под дејством поља капљица креће вертикално навише, као на слици 4-5б, при уравнотежавању сила (**Додатак Б**), можемо писати:

$$mg + F_s = F_E + F_p, \quad (4.9)$$

где је F_E , сила којом електрично поље делује на наелектрисање q

$$F_E = qE = q \frac{U}{d}. \quad (4.10)$$

Заменом релација за силе у једначини (4.9), добијамо:

$$qE = \frac{4}{3} a^3 \pi (\rho - \rho_v) g + \frac{6\pi \eta a v_2}{1 + \frac{b}{ra}}. \quad (4.11)$$

Комбинацијом горњег са изразом (4.4), (4.6) и (4.10) добијамо

$$q = \frac{4}{3} a^3 \pi (\rho - \rho_v) g \frac{d}{U} \left(1 + \frac{v_2}{v_1} \right), \quad (4.12)$$

одакле се познавањем брзина кретања капљице v_1 и v_2 може одредити наелектрисање капљице.

4.3 Ток експеримента

Задаци:

- Повезати шему као на слици 4-4.
- Кроз тунел с (Слика 4-4) поставити жицу „фине пробе“. Ова жица служи за подешавање фокуса микроскопа. Подесити фокус микроскопа а затим уклонити жицу.
- Укључити струјно коло. Проверити да ли светли сијалица. Подесити напон на максималну вредност, а повратни прекидач поставити у неутрални N положај.
- Распршити мало уља у тунел ВС. Опазити капи под микроскопом. Капи се виде као ситне звездице које се крећу на више (у стварности слободно падају). Окретати

повратни прекидач у једном или другом смеру и тражити неку наелектрисану кап. Капи се познају као наелектрисане тако што се крећу знатно брже од осталих, ако их поље убрзава или се крећу у супротном смеру од осталих капи. Ако се не нађе наелектрисана кап, озрачити простор у кондензатору неким радиоактивним извором ради добијања одређеног броја јона. При томе искључити високи напон (постављањем прекидача у неутрални положај). Поступак понављати до добијања наелектрисане капи.

- Изабрати наелектрисану кап која се под дејством електричног поља креће вертикално наниже. Како је слика посматрана под микроскопом изврнута, у стварности капи које се крећу вертикално навише. Забележити време за које капљица пређе рестојање између два подеока на скали, t_2 .
- Искључити високи напон и пустити да кап слободно пада. Измерити време падања капи између два подеока скале, t_1 (у видном пољу микроскопа капи ће се кретати вертикално навише).
- За исту капљицу поново укључите електрично поље и изметири изнова време кретања наниже (у стварности навише), а затим искључити електрично поље и измерити време кретања капи навише (у стварности наниже). Овај поступак поновити док год се капљица креће у видном пољу микроскопа, како би се минимизирала грешка мерења. Уколико се измери по седам вредности времена кретања у оба смера, може се прећи на следећу капљицу.
- Извршити мерење за тридесет капљица.
- Резултате мерења унети у табелу облика:

Табела 4-1: Облик табеле у којој треба уписати резултате свих мерења у експерименту

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	$v_1\left[\frac{m}{s}\right]$	Δv_1	$v_2\left[\frac{m}{s}\right]$	Δv_2
1.											
2.											
3.											

У Табели 4-1 \bar{t} представља средње време које се одређује као $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$, где је N број извршених мерења. Средњу брзину можемо наћи као $v = \frac{ns}{t}$, где је n број подеока за који се посматра кретање капљице. При извођењу експеримента битно је покушати да n буде барем 2, како би се минимизирала несигурност мерења. Горње релације важе у случају ако је у свих N понављања мерења кретања капљице, n има исту вредност. Уколико није случај треба самостално одредити релације за средњу брзину.

4.4 Резултати мерења вредности наелектрисања

Поред измерених података, за одређивање наелектрисања електрона, су нам потребни још и:

- Растојање између подеока скале микроскопа: $s = 4.1667 \cdot 10^{-4} m$, [24]
- Коефицијент вискозности ваздуха: $\eta = 1.83 \cdot 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$
- Густина силиконског уља које се користи за распршивање: $\rho = 973 \frac{kg}{m^3}$
- Густина ваздуха: $\rho_v = 1 \frac{kg}{m^3}$
- Растојање између плоча кондензатора: $d = 5mm$, [24]

Све вредности физичких величина које се одређују преко мерених, потребно је изразити у оквиру грешке, преко грешака директно мерених величина. У овом случају директно мерене величине су време падања капљице и напон. За њих можемо узети половине најмањих подеока на мерним инструментима.

$$\begin{aligned} \Delta t &= 0.5s \\ \Delta V &= 1V \end{aligned} \tag{4.13}$$

Како је за време преласка капљице између два подеока извршена серија мерења, грешку у таквим случајевима изразити као стандардну грешку серије мерења:

$$\Delta t = k \frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}, \quad (4.14)$$

где је $k = 1$ степен поверења, а σ_N стандардна девијација серије од N мерења:

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2}. \quad (4.15)$$

Да би дошли до релације помоћу које можемо рачунати грешку за наелектрисање капљице, најпре морамо наћи грешке за све параметре које смо израчунавали. Па тако на основу познатог израза за брзину $v = \frac{ns}{t}$, имамо да је грешка за брзину падања капљице

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta t}{\bar{t}} \quad (4.16)$$

Затим из једначине (4.8) добијамо као израз грешке за радијус капљице

$$\Delta a = \frac{b}{2\rho} \frac{18\eta\rho^2}{(\rho - \rho_v)gb^2} \Delta v_1. \quad (4.17)$$

На основу једначине (4.12) долазимо до формуле уз помоћ које израчунавамо припадајућу грешку за наелектрисање капљице

$$\frac{\Delta q}{q} = 3 \frac{\Delta a}{a} + \frac{v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1}{v_1(v_1 + v_2)} \quad (4.18)$$

У табели 4-2 су приказане измерене вредности за податке у табели 4-1.

Табела 4-2: Експерименталне вредности за одређивање наелектрисања капљица

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	Δv_1 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	v_2 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	Δv_2 $\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
1	204	1	10.00	13.06	9.94	0.12	13.83	0.25	4.19	0.05	3.01	0.05
			10.27	14.53								
			9.56	13.91								
2	300	1	14.10	9.52	14.52	0.30	9.52	0.50	2.87	0.06	4.38	0.23
			14.94									
3	302	1	15.28	12.37	13.76	0.44	12.15	0.16	3.03	0.10	3.43	0.05
			13.13	11.59								
			12.87	12.50								
4	302	1	13.81	3.69	14.88	0.25	3.91	0.05	2.80	0.05	10.66	0.12
			14.78	4.09								
			13.56	3.78								
			16.44	4.21								
			15.81	3.78								
5	331	2	12.13	5.82	12.10	0.07	5.79	0.02	6.89	0.04	14.39	0.05
			11.75	5.69								
			12.44	5.78								
6	331	2	12.09	5.88	21.37	0.34	9.72	0.08	3.90	0.06	8.58	0.07
			21.19	9.41								
			19.78	9.50								
			23.06	9.82								
7	332	2	21.44	10.13	28.55	0.39	19.53	0.18	2.92	0.04	4.27	0.04
			28.00	19.28								
			29.10	19.78								
8	331	2	8.78	22.34	8.55	0.08	22.69	0.17	9.75	0.09	3.67	0.03
			8.31	22.46								
			8.56	23.28								
			2.69	24.00								
			2.81	24.13								
9	331	2	2.72	23.03	2.75	0.01	23.08	0.20	30.30	0.12	3.61	0.03
			2.72	21.75								
			2.81	22.50								
			8.31	76.38								
10	331	2	8.35	69.41	8.44	0.06	73.95	1.31	9.87	0.07	1.13	0.02
			8.66	76.06								

Табела 4-3 Nastavak 1

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1	Δv_1	v_2	Δv_2	
								$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
11	331	2	2.93	7.25	3.01	0.02	7.06	0.03	27.73	0.15	11.81	0.05
			3.13	7.22								
			2.91	6.84								
			3.03	7.06								
			3.10	6.87								
			2.93	7.09								
12	330	2	3.60	16.16	3.62	0.01	15.63	0.27	23.02	0.05	5.33	0.09
			3.63	16.75								
			3.66	16.09								
			3.65	15.81								
			3.56	13.32								
			14.53	22.75								
13	330	2	14.37	23.03	14.25	0.08	22.89	0.03	5.85	0.03	3.64	0.00
			14.28	22.87								
			13.81	22.90								
			12.29	13.81								
			12.25	12.91								
			11.97	12.50								
14	329	2	12.91	12.29	12.43	0.08	12.77	0.13	6.71	0.04	6.53	0.06
			12.72	12.34								
			17.66	13.72								
			18.19	13.81								
			17.94	13.75								
			17.87	14.41								
15	330	2	17.65	14.25	17.86	0.04	13.99	0.06	4.67	0.01	5.96	0.03
			6.40	19.29								
			6.31	17.84								
			21.31	33.69								
			20.41	33.00								
			21.53	34.28								
16	330	1	24.44	30.91	6.36	0.03	18.57	0.51	6.56	0.03	2.24	0.06
			23.69	28.96								
			23.22	27.38								
			23.94	30.97								
			23.31	28.25								
			23.69	28.96								
17	331	2	23.69	28.96	21.92	0.44	32.97	0.37	3.80	0.08	2.53	0.03
			20.41	33.00								
			21.53	34.28								
			24.44	30.91								
			23.69	28.96								
			23.22	27.38								
18	330	2	23.94	30.97	23.54	0.08	28.89	0.38	3.54	0.01	2.88	0.04
			23.31	28.25								
			23.69	28.96								
			23.22	27.38								
			23.94	30.97								
			23.31	28.25								

Табела 4-4 Nastavak 2

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	Δv_1 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	v_2 $\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	Δv_2 $\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
19	330	2	5.10	10.16	5.29	0.02	10.08	0.05	15.76	0.07	8.26	0.04
			5.25	9.96								
			5.53	10.00								
			5.25	10.22								
			5.28	9.66								
			5.32	10.50								
20	330	2	8.07	27.84	8.35	0.06	27.05	0.23	9.98	0.07	3.08	0.03
			8.56	26.13								
			8.50	27.85								
			8.28	26.37								
21	331	2	8.53	27.13	8.58	0.06	26.97	0.35	9.72	0.07	3.09	0.04
			8.59	28.65								
			8.31	26.81								
			8.87	25.28								
22	330	2	5.72	18.38	5.53	0.08	17.93	0.13	15.06	0.23	4.65	0.03
			5.63	17.79								
			5.25	17.63								
			5.57	15.90								
23	331	2	5.50	15.47	5.51	0.03	15.53	0.06	15.11	0.07	5.36	0.02
			5.69	15.18								
			5.47	15.78								
			5.34	15.34								
			17.65	15.63								
24	330	2	16.75	14.12	17.42	0.11	14.68	0.28	4.78	0.03	5.68	0.11
			17.75	14.29								
			17.53	14.29								
			14.00	11.25								
25	331	1	13.35	10.50	14.03	0.12	10.63	0.11	2.97	0.03	3.92	0.04
			14.50	10.22								
			14.26	10.53								
26	63	2	21.81	23.69	21.44	0.26	23.77	0.05	3.89	0.05	3.51	0.01
			21.07	23.84								
27	267	2	10.38	3.94	10.55	0.12	4.19	0.17	7.90	0.09	19.91	0.82
			10.72	4.43								
28	267	2	36.69	14.90	36.69	0.50	14.90	0.50	2.27	0.03	5.59	0.19

Табела 4-5 Nastavak 3

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1	Δv_1	v_2	Δv_2	
								$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
29	267	2	4.72	27.12	4.53	0.05	28.45	0.42	18.38	0.22	2.93	0.04
			4.47	28.56								
30	267	2	4.41	29.66	10.16	0.50	20.25	0.50	8.20	0.40	4.12	0.10
			10.16	20.25								
31	267	2	8.06	18.78	8.27	0.05	18.83	0.14	10.08	0.06	4.43	0.03
			8.47	19.66								
			8.40	18.38								
			8.13	18.50								
32	267	2	5.43	17.44	5.50	0.03	17.08	0.16	15.17	0.09	4.88	0.04
			5.68	16.22								
			5.37	17.03								
			5.50	17.63								
33	267	2	4.28	13.06	4.28	0.01	12.94	0.04	19.47	0.03	6.44	0.02
			4.31	12.82								
			4.28	12.82								
			4.25	13.07								
34	267	2	4.57	46.97	4.24	0.23	45.99	0.70	19.65	1.08	1.81	0.03
			3.91	45.00								
35	267	2	4.40	23.84	4.25	0.11	23.89	0.03	19.63	0.51	3.49	0.00
			4.09	23.93								
36	267	2	2.82	5.50	2.72	0.02	5.39	0.02	30.69	0.21	15.47	0.06
			2.72	5.34								
			2.66	5.31								
			2.66	5.40								
37	267	2	5.62	13.19	5.55	0.03	13.24	0.12	15.01	0.07	6.29	0.06
			5.47	12.90								
			5.57	13.63								
			8.28	24.03								
38	267	2	8.50	22.04	8.29	0.07	23.76	0.54	10.05	0.08	3.51	0.08
			8.09	25.22								
			8.47	24.90								
			8.97	26.13								
39	267	2	8.97	23.10	8.82	0.06	24.55	0.32	9.45	0.06	3.39	0.04
			8.97	23.10								
			8.85	24.06								

Табела 4-6 Nastavak 4

Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1	Δv_1	v_2	Δv_2	
								$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
40	267	2	5.00	8.28	4.93	0.02	8.72	0.06	16.92	0.08	9.55	0.07
			4.75	8.65								
			5.00	8.66								
			4.85	8.87								
			5.03	9.15								
41	267	2	8.44	41.40	8.67	0.07	40.61	0.27	9.62	0.07	2.05	0.01
			8.78	39.81								
			8.78	40.62								
42	267	2	7.06	10.41	7.06	0.04	10.33	0.09	11.80	0.07	8.07	0.07
			7.13	10.72								
			6.84	9.85								
			7.22	10.34								
43	267	2	5.43	10.10	5.23	0.04	9.97	0.04	15.94	0.12	8.36	0.04
			5.10	9.97								
			5.10	9.72								
			5.28	10.09								
44	267	2	3.47	4.09	3.39	0.02	4.10	0.02	24.56	0.16	20.34	0.09
			3.32	4.00								
			3.31	4.18								
			3.47	4.12								
45	267	2	4.75	7.47	4.99	0.04	7.42	0.03	16.69	0.15	11.24	0.05
			4.97	7.47								
			5.09	7.50								
			5.16	7.22								
46	267	2	7.97	22.15	8.56	0.11	24.16	0.37	9.74	0.12	3.45	0.05
			8.59	24.00								
			8.69	25.09								
			8.97	25.41								
47	267	2	5.32	19.93	5.42	0.02	19.06	0.21	15.37	0.07	4.37	0.05
			5.47	19.66								
			5.53	18.22								
			5.37	18.44								
48	267	2	8.38	31.56	8.35	0.05	32.74	0.66	9.98	0.06	2.55	0.05
			8.47	35.03								
			8.19	31.63								

Табела 4-7 Nastavak 5

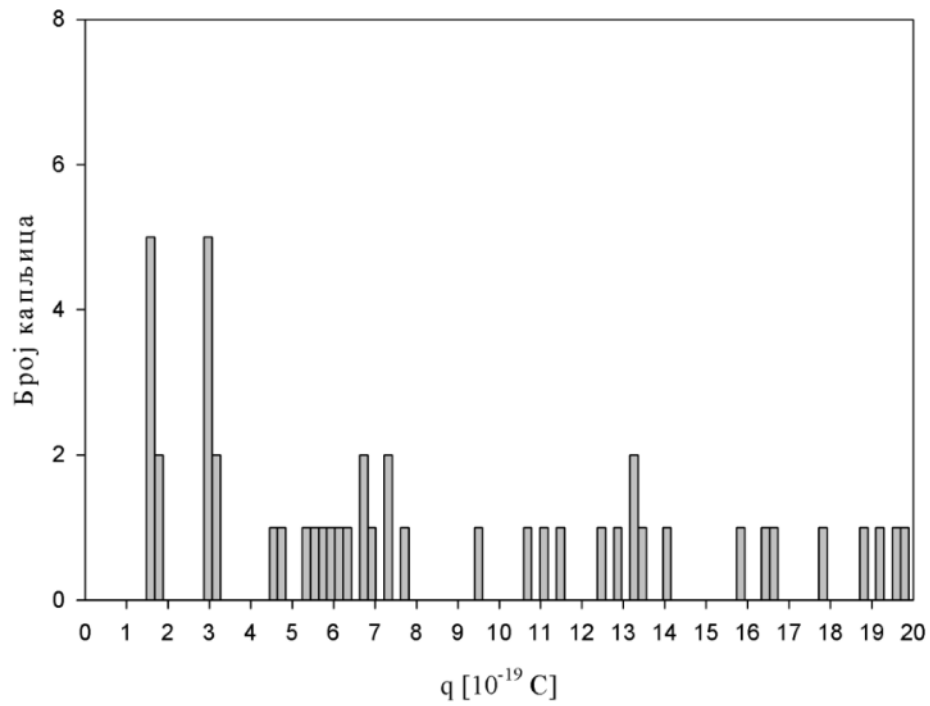
Напон $U[V]$	n	$t_{1i}[s]$	$t_{2i}[s]$	\bar{t}_1	$\Delta\bar{t}_1$	\bar{t}_2	$\Delta\bar{t}_2$	v_1	Δv_1	v_2	Δv_2	
								$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-5} \frac{m}{s}\right]$	$\left[10^{-7} \frac{m}{s}\right]$	
49	267	2	5.44	22.44	5.59	0.03	21.36	0.21	14.91	0.07	3.90	0.04
			5.63	20.44								
			5.69	21.12								
			5.59	21.44								
50	267	2	8.65	31.40	8.68	0.02	32.06	0.28	9.60	0.02	2.60	0.02
			8.78	31.97								
			8.59	31.19								
			8.71	33.69								

На основу вредности из табеле 4-2 могуће је одредити радијус капљице и њено наелектрисање. Вредности су дате у табели 4-3.

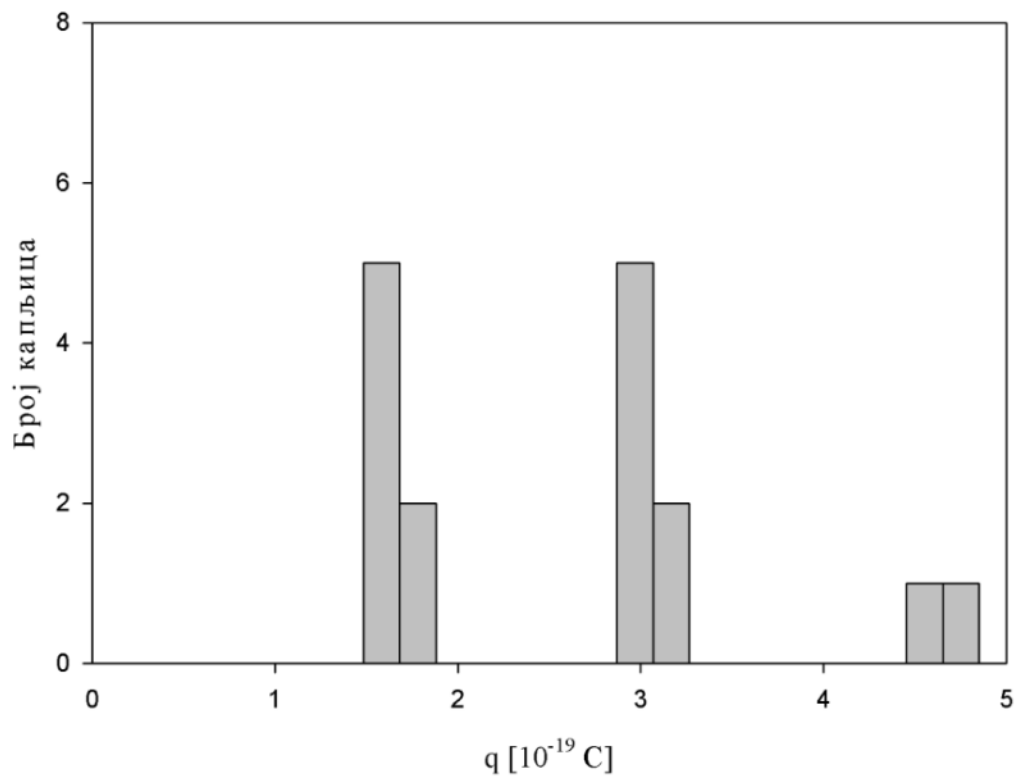
Табела 4-3 приказује вредности наелектрисања капљица. Табеларно приказани подаци су веома корисни јер се детаљи и конкретни бројеви могу приказати. Међутим посматрајући табелу 4-3 не можемо доћи до закључка да постоји најмања количина наелектрисања и колико износи. Уколико стварно постоји елементарно наелектрисање њега би смо могли наћи тражећи највећи заједнички делилац – НЗД свих вредности наелектрисања. То се може постићи користећи Еуклидов алгоритам који треба генерализовати за случаје реалних бројева. Како се сваки експеримент изводи са коначном грешком, НЗД мора да дели све вредности наелектрисања до тачности грешке мерења наелектрисања. Овај поступак није нимало једноставан и изискује итеративне нумеричке методе. Једноставнији приступ би могао да омогући графички приказ вредности из табеле 4-3. Уколико се вредности прикажу у виду хистограма, можемо очекивати нагомилавање података на местима која се периодично понављају. У **Додатку В** је приказан програм на основу којег се може направити расподела у виду хистограма, за чији корак је узето 15% вредности најмањег наелектрисања у табели 4-3. На слици 4-6 је приказан хистограм експерименталних података из табеле 4-3.

Табела 4-8: Радијус капљица и њихова наелектрисања са припадајућим грешкама

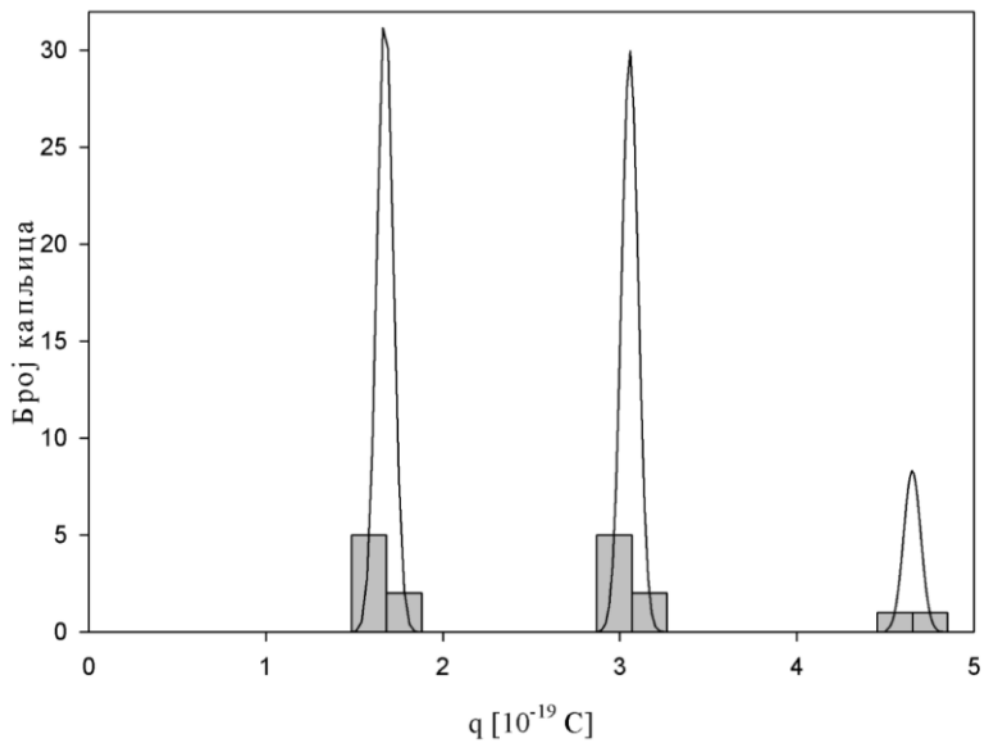
N_0	$a[\mu\text{m}]$	$\Delta a[\mu\text{m}]$	$q[10^{-19}\text{C}]$	$\Delta q[10^{-19}\text{C}]$	N_0	$a[\mu\text{m}]$	$\Delta a[\mu\text{m}]$	$q[10^{-19}\text{C}]$	$\Delta q[10^{-19}\text{C}]$
1	0.561	0.004	2.98	0.09	26	0.539	0.004	9.45	0.26
2	0.458	0.005	1.61	0.14	27	0.785	0.005	12.76	1.22
3	0.471	0.008	1.48	0.11	28	0.403	0.003	1.70	0.14
4	0.452	0.004	2.93	0.19	29	1.219	0.008	15.71	0.46
5	0.731	0.002	7.27	0.12	30	0.801	0.021	5.77	0.66
6	0.540	0.005	3.04	0.13	31	0.892	0.003	7.65	0.11
7	0.462	0.003	1.46	0.05	32	1.104	0.003	13.29	0.20
8	0.877	0.004	5.60	0.12	33	1.256	0.001	19.71	0.07
9	1.577	0.003	26.46	0.27	34	1.262	0.036	16.41	2.23
10	0.883	0.003	4.62	0.09	35	1.261	0.017	17.67	1.09
11	1.507	0.004	29.42	0.36	36	1.587	0.006	44.96	0.72
12	1.369	0.002	19.12	0.12	37	1.098	0.003	14.04	0.16
13	0.670	0.002	2.96	0.04	38	0.891	0.004	7.14	0.15
14	0.720	0.002	4.48	0.08	39	0.863	0.003	6.53	0.11
15	0.594	0.001	2.90	0.02	40	1.168	0.003	18.64	0.23
16	0.712	0.002	2.93	0.04	41	0.871	0.003	5.99	0.11
17	0.533	0.006	1.52	0.07	42	0.969	0.003	11.45	0.17
18	0.513	0.001	1.48	0.02	43	1.132	0.004	16.56	0.29
19	1.126	0.003	13.16	0.14	44	1.415	0.005	38.78	0.60
20	0.888	0.003	5.54	0.09	45	1.160	0.005	19.52	0.40
21	0.875	0.003	5.34	0.09	46	0.877	0.006	6.82	0.20
22	1.100	0.009	10.53	0.37	47	1.111	0.003	13.18	0.14
23	1.102	0.003	10.93	0.12	48	0.888	0.003	6.57	0.10
24	0.602	0.002	2.89	0.07	49	1.094	0.003	12.36	0.14
25	0.467	0.002	1.42	0.04	50	0.870	0.001	6.25	0.04



Слика 4-6: Хистограм експерименталних података из табеле 4-3



Слика 4-7: Хистограм са слике 4-6, где су зумирани пикови



Слика 4-8: Фитовани хистограми са слике 4-7 Гаусовим функцијама

На слици 4-8 су вредности фитоване Гаусовим функцијама јер се очекује раштркавање података у виду Гаусијана. Функције су центриране око средње вредности и представљају наелектрисања капљица. Она износе:

$$\begin{aligned}
 q_I & (1.672 \pm 0.125) \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
 q_{II} & (3.057 \pm 0.146) \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
 q_{III} & (4.65 \pm 0.067) \cdot 10^{-19} \text{ C}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

За вредности грешака узета је највећа грешка наелектрисања капљице чије вредности су избројене у правоугаонику хистограма.

Уколико је хипотеза о елементарном наелектрисувању истинита, горње вредности треба да представљају умношке од 1 до 3 елементарног наелектрисувања у границама грешке. Не можемо искључити могућност да наш узорак није био довољно велик и да нисмо измерили најмању вредност наелектрисувања, већ рецимо другу, четврту и шесту. У том случају наша измерена вредност неће бити минимална вредност наелектрисувања. Како би смо били сигурни, потребно је водити рачуна о изабиреу капљица које претимо. О томе ће бити речи касније. Уколико горње три вредности представљају прва три умношка елементарног наелектрисувања, онда елементарно наелектрисување можемо одредити усредњавањем утежњених горњих вредности

$$q = \frac{1}{3} \left(\frac{q_I}{1} + \frac{q_{II}}{2} + \frac{q_{III}}{3} \right), \quad (4.20)$$

као и припадајућу грешку

$$\Delta q = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta q_I}{1} + \frac{\Delta q_{II}}{2} + \frac{\Delta q_{III}}{3} \right). \quad (4.21)$$

Елементарно наелектрисување израчунато у овом раду износи

$$q = (1.583 \pm 0.074) \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (4.22)$$

Прихваћена вредност заокружена на трећој децимали износи:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (4.23)$$

Добијена вредност у овом раду се у границама грешке подудара са елементарним наелектрисувањем електрона, што је и био циљ овог рада.

Напомена: У овом делу рада је потребно напоменути да није довољно једноставно уочити наелектрисувану кап и мерити време њеног кретања нагоре и надоле. Са слике 4-6 се може видети да се наелектрисувања раштркавају до вредности $13e$, где се притом види да је висина хистограма јединица. То значи да је измерена свега по једна капљица са великим бројем наелектрисувања, што онемогућава формирање пикова на графицима.

Чак је и за вредност q_{III} мали број капљица измерен како би смо отклонили мерну несигурност. Зато је потребно урадити следеће:

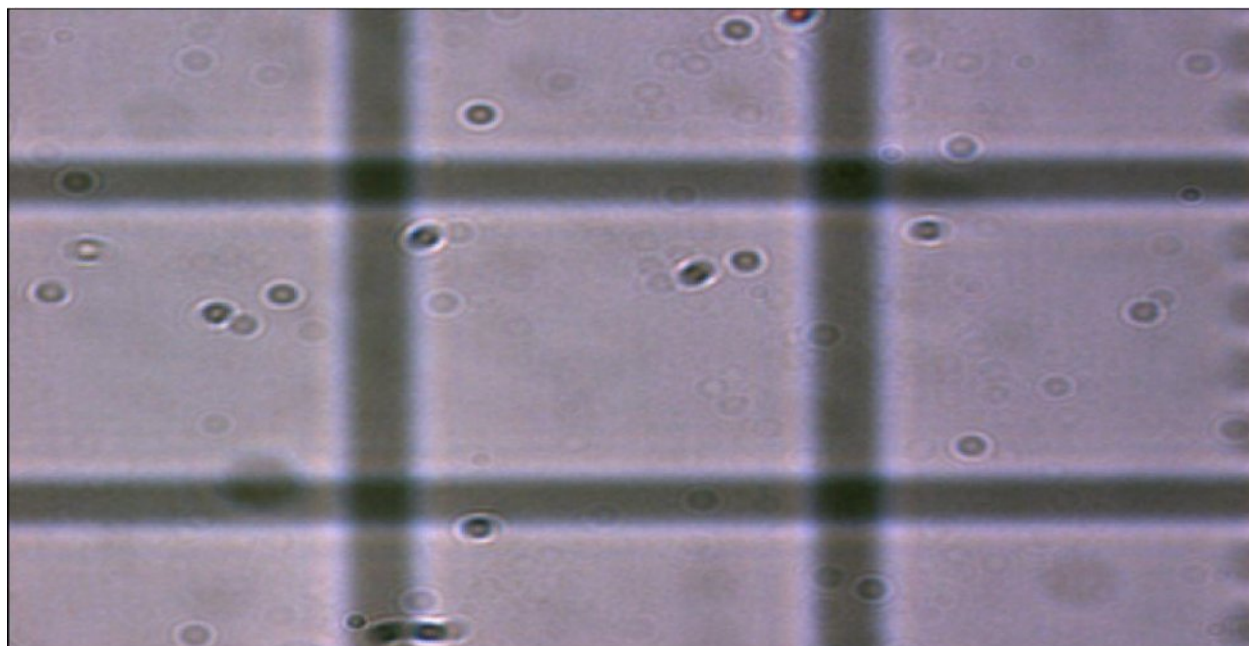
- измерити што већи број капљица
- селектовати капљице са што мањим наелектрисањем.

Не постоји шаблон за испуњавање горњих услова, већ експериментатор мора да створи осећај на основу већег броја поновљених мерења. На капљице са малим q делује мала електрична сила. Због тога се оне спорије крећу у електричном пољу. Међутим то није довољан услов. Уколико су капљице са малим q , али са великим радијусом a , због велике тежине и оне ће се споро кретати у електричном пољу. Због тога је од интереса наћи мале капљице које се споро крећу вертикално навише (под микроскопом наниже), јер већа шанса да су наелектрисане са малом количином наелектрисања. То није једноставно урадити и потребно је извесно искуство у селектовању капљица.

4.5 Усавршавање Миликенове апаратуре

Код овог експеримента постоји могућност усавршавања апаратуре. За потребе овог рада је то урађено на следећи начин. Посматрање наелектрисаних капљица голим оком преко микроскопа је замењено снимањем CCD камером, која је повезана са рачунаром на чијем екрану можемо даље пратити капљицу. За извор светлости уместо лампице се користи ласер црвене боје таласне дужине $\lambda = 694.3nm$. Овде се јавља проблем који настаје услед коришћења ласерског зрачења, јер са овим извором светлости није могуће видети мрежу која је постављена испред окулара помоћу које знамо колики је пут прешла капљица. Овај проблем је решен тако што је постављена бела светлост (лед лампа) и снимљена прво мрежа на рачунару (слика 4-9). Уз помоћ те слике калибрисан је екран на рачунару и биле су познате његове димензије за тај случај. Затим је постављен ласер и снимано кретање капљице (слика 4-10). Време за које капљица пређе познато растојање меримо штоперicom или касније одредимо уз помоћ снимка који траје одређени

временски период. Када имамо те податке даљи ток експеримента тече као што је описано у параграфу 4.4.



Слика 4-9: Снимак мреже



Слика 4-10: Снимак кретања наелектрисаних капљица уља

5 Закључак

У уводном и другом делу рада описана су основна својства електрона (величина, таласни карактер), његов настанак, као и кретање електрона у стационарним електричним и магнетним пољима (једначине кретања).

Трећи део је посвећен одређивању масеног наелектрисања електрона на основу Томсоновог експеримента. Објашњено је математичко одређивање e/m , апаратура експеримента, ток истог, експериментално одређивање e/m , као и магнетно поље Хелмхолцових калемова како на оси тако и у произвољној тачки простора. Измерена вредност масеног наелектрисања је блиска стварној, али тачна вредност у границама грешке није добијена. Детаљном инспекцијом резултата и експерименталне апаратуре, уочено је да електронски топ из којег се емитују електрони није центриран на правилан начин. Сноп електрона није правилно колимисан и долази до заштравања дела млаза под великим углом. Ово такође утиче на радијус електрона у присуству магнетног поља који за одређену вредност поља има дискретну промену. Електронски топ је затопљен унутар стакленог балона, тако да није могуће исправити овај недостатак. Без обзира на ову недоследност, експериментална апаратура даје сасвим задовољавајуће вредности за лабораторијску демонстрацију одређивања односа e/m .

Четврта глава се односи на одређивање наелектрисања електрона Миликеновим експериментом. Ту је описана апаратура потребна за експеримент као и сам ток експеримента. Такође приказани су резултати добијени експериментом и упоређени су са литературном вредношћу наелектрисања електрона, где се показало одлично слагање. На крају је било речи и о усавршавању апаратуре за извођење вежбе, на савременији начин који не мења методологију рада, али омогућава лакшу и ефикаснију аквизицију релевантних података.

6 Додатак А

!Program "Magnetno_polje_Helmholcovih_kalemova" je napisan kako bi se omogucila
!numericka integracija i odredjivanje magnetnog polja u prostoru izmedju
!Helmholcovih kalemova

Program Magnetno_polje_Helmholcovih_kalemova
! Deklaracija promenljivih
DOUBLE PRECISION::Rmi0, Pi, R, H, Struja
DOUBLE PRECISION::xP, yP, zP, x, y, z, Bx, By, Bz, Bx1, By1, Bz1, Bx2, By2, Bz2
DOUBLE PRECISION::DeltaRoPrim, DeltaFiPrim, DeltaZetPrim, DeltaFi, RoPrim, FiPrim, ZetPrim
DOUBLE PRECISION::DeltaBx1,DeltaBy1,DeltaBz1,DeltaBx2,DeltaBy2,DeltaBz2
DOUBLE PRECISION::radijusVektor1,radijusVektor2
! Blok za deljenje promenljivih sa podprogramima
Common/Funkcija/ Rmi0,R,Struja

!Izlazni fajlovi
OPEN (10, File ='mesxXZBxBz.TXT')
OPEN (20, File ='meshBxBz.TXT')
OPEN (30, File ='zOsa_B2.TXT')
OPEN (40, File ='zOsa_B.TXT')

Pi=4.*ATAN(1.)
R = 0.14 !Poluprecnik kalemova u [m]
H=R !Rastojanje iymedju kalemova

Rmi0=4.*Pi*1.E-07 !Magnetana permeabilnost vakuma
Struja=1. !Struja magnetizacije u [A]

!Odredjivanje koraka podele prostora izmedju kalemova
NPrim=30

DeltaRoPrim=R/Real(NPrim) !Diskretizacija prostora po Ro'
DeltaFiPrim=2.*Pi/Real(NPrim) !Diskretizacija prostora po Fi'
DeltaZetPrim=H/Real(NPrim) !Diskretizacija prostora po Z'

!Odredjivanje koraka podele kruznice
N=1000
DeltaFi=2.*Pi/Real(N) !Diskretizacija kruznice kalema po Fi

!Petlje za odredjivanje B u pojediniacnim tackama u prostoru izmedju kalemova.

!FiPrim=0.
!Do FiPrim=0., 2.*Pi, DeltaFiPrim
Do FiPrim=0., Pi, Pi

!RoPrim=0.
Do RoPrim=0., 1.5*R, DeltaRoPrim

!ZetPrim=H/2.

Do ZetPrim=-0.5*H, 1.5*H, DeltaZetPrim
!Do ZetPrim=0., H, DeltaZetPrim

!Preskacemo tacke u kojima se nalazi namotaj
If (((RoPrim==R).AND.(ZetPrim==0.)).OR.((RoPrim==R).AND.(ZetPrim==H))) cycle

! Ovdje racunamo polje u jednoj konkretnoj tacki
! Sufiks 1 se odnosi na prvi kalem, a 2 na drugi kalem

xP=RoPrim*COS(FiPrim)
yP=RoPrim*SIN(FiPrim)
zP=ZetPrim

Bx=0.
By=0. !Pocetne Vrednosti
Bz=0.

Bx1=0.
By1=0.
Bz1=0.

Bx2=0.
By2=0.
Bz2=0.

! Petlja koja sumira doprinos indukciji od svih elemenata kruznice
Do Fi=0.,2.*Pi, DeltaFi

x=R*COS(Fi)
y=R*SIN(Fi)

! Prvi Kalem
z=0.

radijusVektor1=((xP-x)**2.+(yP-y)**2.+(zP-z)**2.)*(1./2.)

!If (radijusVektor1.LT.0.01) cycle

DeltaBx1=(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor1**3.))*(zP-z)*x*DeltaFi
DeltaBy1=(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor1**3.))*(zP-z)*y*DeltaFi
DeltaBz1=-(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor1**3.))*(x*(xP-x)+y*(yP-y))*DeltaFi

Bx1=Bx1+DeltaBx1
By1=By1+DeltaBy1
Bz1=Bz1+DeltaBz1

!Drugi kalem
z=H
radijusVektor2=((xP-x)**2.+(yP-y)**2.+(zP-z)**2.)*(1./2.)

!If (radijusVektor2.LT.0.01) cycle

DeltaBx2=(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor2**3.))*(zP-z)*x*DeltaFi
DeltaBy2=(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor2**3.))*(zP-z)*y*DeltaFi
DeltaBz2=-(Rmi0*Struja/(4.*Pi*radijusVektor2**3.))*(x*(xP-x)+y*(yP-y))*DeltaFi

```
Bx2=Bx2+DeltaBx2
By2=By2+DeltaBy2
Bz2=Bz2+DeltaBz2
```

```
!Suma
```

```
Bx=(Bx1+Bx2)*1.E+03*160
By=(By1+By2)*1.E+03*160
Bz=(Bz1+Bz2)*1.E+03*160
```

!Komponente B od svih namotaja (160) oba kalema

```
End Do
```

```
!WRITE(10,*)xP, zP, Bx, Bz
!WRITE(20,*)Bx1*1.E+06, By1*1.E+06, Bz1*1.E+06
!WRITE(30,*)Bx2*1.E+06, By2*1.E+06, Bz2*1.E+06
!WRITE(20,*)
WRITE(10,*)xp, zp, SQRT(Bx**2+By**2+Bz**2)
```

```
End Do
```

```
End Do
```

```
End Do
```

```
End
```

```
Function B(z,Rmi0,R,Struja)
```

```
DOUBLE PRECISION:: Rmi0, R, Struja
```

```
!Analiticko resenje za B duz z ose
```

```
B= (Rmi0*R**2.*Struja)/(2.*(R**2.+z**2.))**(3./2.)
```

```
End Function
```

7 Додатак Б

У овом додатку показаћемо да се услед Стоксове силе која је пропорционална брзини кретања, после извесног времена кретања капљице успоставља равномерни режим кретања.

Посматрајмо за почетак слику 4-5а. Можемо написати једначину кретања:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_p + \vec{F}_s \quad (\text{Б.1})$$

У скаларном облику:

$$ma = mg - F_p - F_s \quad (\text{Б.2})$$

Радијус капљице у овом одељку ћемо обележавати са r како неби дошло до забуне са убрзањем. Заменом израза за силе и дељењем са масом капљице $m = \rho V$, где је V њена запремина добијамо:

$$a = g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v} \right) - \frac{6\pi\eta r v}{\rho V} \quad (\text{Б.3})$$

Како је $a = \frac{dv}{dt}$, можемо интегралити горњу једначину раздвајањем променљивих:

$$\int \frac{dv}{g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v} \right) - \frac{6\pi\eta r v}{\rho V}} = \int dt + C, \quad (\text{Б.4})$$

где C можемо одредити на основу почетних услова $t = 0, v_0 = 0$:

$$C = -\frac{\rho V}{6\pi\eta r} \ln \left(g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v} \right) \right) \quad (\text{Б.5})$$

Заменом константе у (Б.4) и сређивањем израза добијамо:

$$v = \frac{\rho V}{6\pi\eta r} g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v} \right) \left[1 - e^{-\frac{6\pi\eta r}{\rho V} t} \right] \quad (\text{Б.6})$$

Функција у (Б.6) представља експоненцијални раст до максимума. Заменом параметара можемо нацртати график ове функције. Радијус капљице је $1\mu\text{m}$. Коэффициент вискозности је коригован на радију капљице. На слици 7-1 је приказан график зависности брзине капљице од времена.

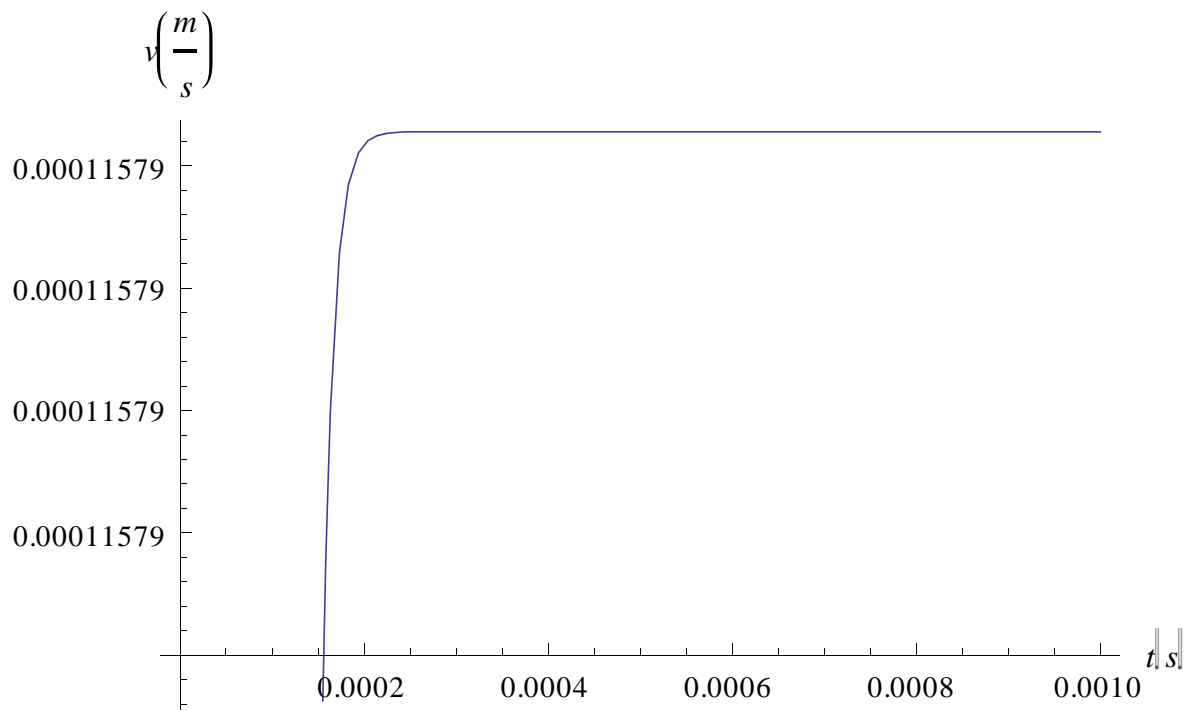
На сличан начин можемо решити једначину при кретању капљице у електричном пољу. Једначина кретања гласи:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_s + \vec{F}_p + \vec{F}_E \quad (\text{Б.7})$$

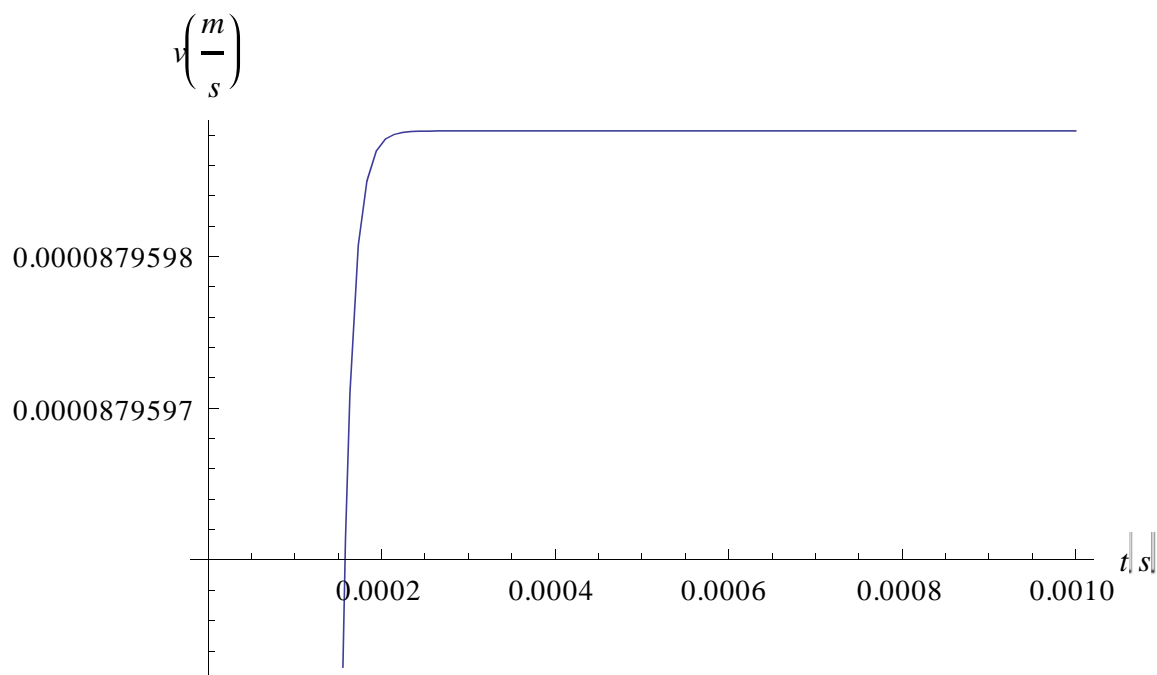
$$ma = F_E + F_p - mg - F_s \quad (\text{Б.8})$$

$$v = \frac{\rho V}{6\pi\eta r} \left[\frac{qE}{\rho V} - g \left(1 - \frac{\rho}{\rho_v} \right) \right] \left[1 - e^{-\frac{6\pi\eta r}{\rho V} t} \right] \quad (\text{Б.9})$$

На слици 7-2 је приказана зависност брзине од времена при кретању у електричном пољу кондензатора чије је растојање између плоча $d = 0.5\text{cm}$, а напон $U = 300\text{V}$. Наелектрисање капљице је $q = e$. Са графика 7-1 и 7-2 се може видети да равнотежно стање практично тренутно наступа.



Слика 7-1: График зависности брзине капљице у Миликеновом експерименту од времена при слободном паду



Слика 7-2: График зависности брзине капљице у Миликеновом експерименту од времена при кретању капљице у електричном пољу наспрот силе Земљине тежје

8 Додатак В

!Program koji služi za kreiranje raspodele ponavljanja naelektrisanja
Program Miliken

```
Allocatable :: q(:),qGreska(:), qGreskaHistogram(:)
Allocatable :: I_Fja_q(:), Fja_Raspodele(:)
Open(10, file="Miliken.txt") !Ulazni podaci
Open(40, file="milikenRaspodela.txt") !Izlazni podaci
N=0 !Brojac kapljica
Do
Read(10,*, err=20) qTemp
N=N+1
End do
20 continue

Rewind(10)
Print*, 'Ukupno kapljica', N
Allocate(q(N), qGreska(N))
Do I=1,N
Read(10,*) q(I), qGreska(I)
End do
Nkorak=220 !Broj koraka raspodele
qmin=MinVal(q)
qmax=MaxVal(q)
qkorak=(qmax-qmin)/Real(Nkorak)
print*, qmin/10
print*, qkorak
Allocate(qGreskaHistogram(Nkorak), I_Fja_q(Nkorak))
DO j=1,Nkorak
qGreskaHistogram(j)=0.
End do

Do I=1,N
Do J=1,Nkorak
If((q(I)).LE.(qkorak*J)) Then
I_Fja_q(J)=I_Fja_q(J)+1 !Biram maksimalnu gresku
IF (qGreska(I)>qGreskaHistogram(j)) qGreskaHistogram(j)= qGreska(I)
Exit
End If
End Do
End Do
Print*,Sim(I_Fja_q)/Real(N)

Allocate(Fja_Raspodele(Nkorak))
Do J=1,Nkorak
Fja_raspodele(J)=Real(I_Fja_q(J))/(qKorak*Real(n))
Write(40,*)Real(J)*qKorak/(1.e-19), I_Fja_q(J), qGreskaHistogram(j)/(1.e-19)
End Do
End Додатак
```

Референце

-
1. Curtis, L.J. (2003). *Atomic Structure and Lifetimes: A Conceptual Approach*. Cambridge University Press. стр. 74. ISBN 978-0-521-53635-6.
 2. Anastopoulos, C. (2008). *Particle Or Wave: The Evolution of the Concept of Matter in Modern Physics*. Princeton University Press. стр. 236—237. ISBN 978-0-691-13512-0.
 3. Eichten, E.J.; Peskin, M.E.; Peskin, M. (1983). „New Tests for Quark and Lepton Substructure”. *Physical Review Letters*. 50 (11): 811—814. doi:10.1103/PhysRevLett.50.811.
 4. „CODATA value: proton-electron mass ratio”. 2006 CODATA recommended values. National Institute of Standards and Technology.
 5. Pauling, L.C. (1960). *The Nature of the Chemical Bond and the Structure of Molecules and Crystals: an introduction to modern structural chemistry* (3rd). Cornell University Press. стр. 4—10. ISBN 978-0-8014-0333-0.
 6. Keithley, J.F. (1999). *The Story of Electrical and Magnetic Measurements: From 500 B.C. to the 1940s*. IEEE Press. pp. 15, 20. ISBN 0-7803-1193-0.
 7. "Benjamin Franklin (1706–1790)". *Eric Weisstein's World of Biography*. Wolfram Research. Retrieved 2010-12-16.
 8. Thomson, J.J. (1897). „Cathode Rays”. *Philosophical Magazine*. 44: 293.
 9. Wilson, R. (1997). *Astronomy Through the Ages: The Story of the Human Attempt to Understand the Universe*. CRC Press. стр. 138. ISBN 978-0-7484-0748-4.
 10. Smirnov, B.M. (2003). *Physics of Atoms and Ions*. Springer. 14—21. ISBN 978-0-387-95550-6.
 11. Bohr, N. (1922). „Nobel Lecture: The Structure of the Atom” (PDF). The Nobel Foundation.
 12. Lewis, G.N. (1916). „The Atom and the Molecule”. *Journal of the American Chemical Society*. 38 (4): 762—786. doi:10.1021/ja02261a002.

-
13. Arabatzis, T.; Gavroglu, K. (1997). „The chemists' electron”. *European Journal of Physics*. 18 (3): 150—163. A. doi:10.1088/0143-0807/18/3/005.
 14. Langmuir, I. (1919). „The Arrangement of Electrons in Atoms and Molecules”. *Journal of the American Chemical Society*. 41 (6): 868—934. doi:10.1021/ja02227a002.
 15. Scerri, E.R. (2007). *The Periodic Table*. Oxford University Press. стр. 205—226. ISBN 978-0-19-530573-9.
 16. Massimi, M. (2005). *Pauli's Exclusion Principle, The Origin and Validation of a Scientific Principle*. Cambridge University Press. стр. 7—8. ISBN 978-0-521-83911-2.
 17. Smirnov, B.M. (2003). *Physics of Atoms and Ions*. Springer. стр. 14—21. ISBN 978-0-387-95550-6.
 18. Uhlenbeck, G.E.; Goudsmith, S. (1925). „Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons”. *Die Naturwissenschaften*. 13 (47): doi:10.1007/BF01558878.
 19. Pauli, W. (1923). „Über die Gesetzmäßigkeiten des anomalen Zeemaneffektes”. *Zeitschrift für Physik*. 16 (1): 155—164. doi:10.1007/BF01327386.
 20. Hermann Haken, Hans C. Wolf. *The Physics of Atoms and Quanta: Introduction to Experiments and Theory*. ISBN-13: 978-3-540-56312-9
 21. Dr M.Kurepa, Dr D.Filipovic (1997). *Elektron kakvog ga znamo*. ISBN 86-17-05597-9
 22. D. Nikezić (1998). *Praktikum Atomske i Nuklearne fizike*, PMF Kragujevac.
 23. M.D. Allen and O. G. Raabe, *Re-evaluation of Millikan's Oil Drop Data for Small Particles in Air*, *J. Aerosol Sci.* 13, 537

Биографија:

Александар Марковић је рођен 13.04.1992. године у Крагујевцу.

Основну школу "Карађорђе" у Рачи завршио је 2007. године после чега уписује средњу школу "Ђура Јакшић" смер Електротехничар рачунара такође у Рачи.

Након завршене средње школе 2011. године уписује Основне академске студије физике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу.

Године 2015. завршава основне студије физике са просечном оценом 8.46 и стиче звање Дипломирани физичар – наставник физике и информатике. Исте године уписује Мастер академске студије физике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу.